

¹ доктор фізико-математичних наук, професор кафедри прикладної математики і комп'ютерних технологій Донецького національного університету

² здобувач кафедри прикладної математики і комп'ютерних технологій Донецького національного університету

КОЛИВАННЯ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ, ЩО РОЗДІЛЯЄ ІДЕАЛЬНІ РІДИНИ РІЗНОЇ ГУСТИНИ В ПРЯМОКУТНОМУ КАНАЛІ З ЖОРСТКИМИ ПІДСТАВАМИ

У лінійній постановці виведено частотне рівняння власних коливань пластини, що розділяє ідеальні рідини різної густини в прямокутному каналі з жорсткими підставами. Отримана єдина форма частотного рівняння як для симетричних, так і несиметричних спільних коливань пластини і рідини. Розглянуто різні граничні випадки: виродження пластини в мембрану, її відсутність, випадок відсутності верхньої або нижньої рідини. Для широкого кола параметрів розглянутій механічній системі проведено і проаналізовано чисельні дослідження.

Ключові слова: гідропружність, прямокутна пластинка, плоскі коливання, двошарова ідеальна нестислива рідина.

Вступ

На підставі єдиного Лагранжевого підходу задача про коливання і стійкості пружної прямокутної пластини між ідеальними рідинами різної густини в жорсткому прямокутному каналі, мабуть, вперше була розглянута в статті [1] та в монографії [2]. В роботі [3] ця задача була розглянута на підставі Ейлерового підходу. Найбільш повне дослідження вільних коливань мембрани на вільній поверхні рідини в прямокутному каналі було проведено в статті [4]. В роботі [5] ця задача була узагальнена на випадок двошаровій рідині з мембранами на вільній і внутрішній поверхнях, а в статті [6] потім узагальнена на випадок пружного дна. Найбільш повний огляд літератури наведено в [14]. З останніх робіт з даної тематики слід відзначити статті [7–10]. В роботах [11–13] розглянута задача про осесиметричні коливання пружної мембрани, що розділяє двохщільнісну рідину в жорсткому круговому циліндричному резервуарі стосовно до сучасних капілярним систем відбору рідини (КСОЖ). Дана стаття узагальнює результати статті [14] на випадок прямокутної пластини і продовжує дослідження, започатковані в роботах [3–6]. Основні положення цієї роботи були докладені та обговорені на двох конференціях [15–16].

Постановка завдання

Розглянемо плоскі коливання пружної прямокутної пластини, що розділяє ідеальні не стискаємі щільності рідини ρ_i ($i = 1, 2$) у жорсткому прямокутному каналі шириною b . Пластину має згинальної жорсткості D і схильна до розтягуючи зусиллям інтенсивності T в серединній поверхні. Контур пластини защемлена. Верхня і нижня рідини заповнюють канал відповідно до глибин h_1 і h_2 . Систему координат $Oxyz$ розташуємо так, щоб площина Oxy перебувала на незбуреній серединній поверхні пластини, вісь Ox була спрямована вздовж каналу по його середині, а вісь z - протилежно вектору прискорення сили тяжіння \vec{g} (рис. 1).

Колівання пластини і рідини будемо розглядати в лінійній постановці, вважаючи спільні коливання пластини і рідини безвідривну, а руху рідин потенційними. Рівняння плоских коливань пружної пластини і рідини мають вигляд [3–7]:

$$k_{01} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} - T \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = P_2 - P_1 \quad \text{при } z = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (2)$$

з граничними умовами:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \quad \text{при } z = 0, \quad (3)$$

$$W|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0, \quad (4)$$

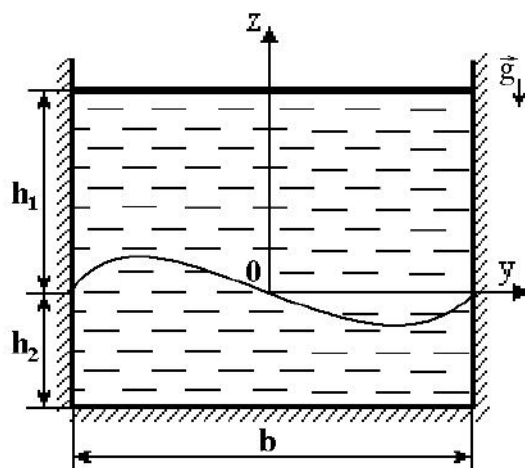


Рис. 1: Прямокутна пластина поділяє рідини різної густини в прямокутному каналі

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} W dy = 0 \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = h_1, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0 \text{ при } z = h_2, \quad (7)$$

де $k_{01} = \rho_0 \delta_0$; $W(y, t)$, ρ_0 , δ_0 — відповідно нормальний прогин, щільність і товщина пластини; $\Phi_i(y, z, t)$ — потенціал швидкості i -ої рідини ($i = 1, 2$); $P_i(x, y, z, t)$ — гідродинамічний тиск i -ої рідини.

Тиск $P_i(x, y, z, t)$ знаходиться інтеграла Коші-Лагранжа $\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + gz + \frac{P_i}{\rho_i} = Q_i$, де Q_i — довільна функція часу. Не обмежуючи спільності цю функцію можна покласти рівною нулю.

Рівняння (3) показує безперервність нормальної складової швидкості при переході від першої рідини до другої.

З урахуванням інтеграла Коші-Лагранжа (1) можна записати наступним чином:

$$k_{01} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + g \Delta \rho W = \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \text{ при } z = 0, \quad (8)$$

де $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$.

Метод розв'язання

Уявімо функції $\Phi_i(y, z, t)$ у вигляді рядів Фур'є за власними функціями $\psi_n(y)$:

$$\Phi_i = \sum_{n=1}^{\infty} [A_{in}(t)e^{k_n z} + B_{in}(t)e^{-k_n z}] \psi_n(y) \quad (i = 1, 2), \quad (9)$$

де

$$\psi_n(y) = \cos k_n \left(y + \frac{b}{2} \right), \quad (10)$$

а відповідні їм власні числа $k_n = \frac{P_{in}}{b}$. Власні функції $\psi_n(y)$ і власні числа k_n описують коливання ідеальної рідини в прямокутному каналі.

Подання функцій $\Phi_i(y, z, t)$ у вигляді (9) з урахуванням (10) дозволяє задовольнити рівняння (2) і граничним умовам (6).

Підставивши ряди (9) в (3) і (7) і, скориставшись ортогональністю функції ψ_n , отримуємо лінійну систему рівнянь щодо невідомих A_{in} , B_{in} і \dot{W}_n

$$\begin{aligned}
 A_{1n} - B_{1n} &= \frac{1}{k_n} \dot{W}_n, \\
 A_{1n} - B_{1n} &= A_{2n} - B_{2n}, \\
 A_{1n} e^{\kappa_{1n}} - B_{1n} e^{-\kappa_{1n}} &= 0, \\
 A_{2n} e^{-\kappa_{2n}} - B_{2n} e^{\kappa_{2n}} &= 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Розв'яжемо систему (11) щодо A_{in} , B_{in} :

$$A_{1n} = -\frac{\dot{W}_n e^{-\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh \kappa_{1n}}, \quad B_{1n} = -\frac{\dot{W}_n e^{\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh \kappa_{1n}}, \tag{12}$$

$$A_{2n} = \frac{\dot{W}_n e^{\kappa_{2n}}}{2k_n \sinh \kappa_{2n}}, \quad B_{2n} = \frac{\dot{W}_n e^{-\kappa_{2n}}}{2k_n \sinh \kappa_{2n}}. \tag{13}$$

$$W_n = \frac{1}{N_n^2} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} W \psi_n dy, \tag{14}$$

$$N_n^2 = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \psi_n^2 dy = \frac{b}{2}, \quad \kappa_{in} = h_i k_n. \tag{15}$$

З урахуванням співвідношень (9), (12) і (13) рівняння (8) набуде вигляду:

$$k_{01} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - T \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + g \Delta \rho W = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \ddot{W}_n}{k_n} \psi_n, \tag{16}$$

де $a_n = \rho_1 \coth \kappa_{1n} + \rho_2 \coth \kappa_{2n}$.

Таким чином, спільні коливання пружної пластини і рідини знаходяться з системи інтегродиференціальних рівнянь (14) і (13), граничних умов (4), умов нестисливості рідини (5) та заданих початкових умов.

Власні спільні коливання пружної пластини і рідини. Для знаходження власних частот спільних коливань пружної мембрани і рідини покладемо

$$W(y, t) = w(y) e^{i\omega t} \tag{17}$$

Підставивши (17) в (14) і (13) і граничні умови (4), отримаємо наступну крайову задачу для форми прогину пластини

$$\frac{d^4 w}{dy^4} - p \frac{d^2 w}{dy^2} + qw = \frac{\omega^2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n w_n}{k_n} \psi_n, \tag{18}$$

$$w_n = \frac{1}{N_n^2} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} w \psi_n dy, \tag{19}$$

$$w|_{y=\pm\frac{b}{2}} = 0, \quad \left. \frac{dw}{dy} \right|_{y=\pm\frac{b}{2}} = 0. \tag{20}$$

$p = \frac{T}{D} \geq 0$, $q = \frac{k_{01} \omega^2 - g \Delta \rho}{D}$ ($D \neq 0$) розглянутий в роботі [1].

Загальне рішення рівняння (18) будемо шукати у вигляді лінійної комбінації двох рішень w_k^0 ($k = \overline{1, 4}$) відповідного однорідного рівняння

$$\frac{d^4 w_k^0}{dy^4} - p \frac{d^2 w_k^0}{dy^2} + q w_k^0 = 0 \tag{21}$$

і приватного рішення неоднорідного рівняння у вигляді ряду за власними формами коливань ідеальної рідини ψ_n

$$w = \sum_{k=1}^4 A_k^0 w_k^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n \psi_n. \quad (22)$$

A_k^0 і \tilde{C}_n — невідомі константи.

Підставив (22) у рівняння (18), і скориставшись рівностями $\frac{d^2 \psi_n}{dy^2} = -k_n^2 \psi_n$ і $\frac{d^4 \psi_n}{dy^4} = k_n^4 \psi_n$, знайдемо \tilde{C}_n

$$\tilde{C}_n = \frac{\omega^2 a_n w_n}{k_n d_n}, \quad (23)$$

де $d_n = (Dk_n^2 + T) k_n^2 + g\Delta\rho - k_{01}\omega^2$

Підставив (23) у (22), а потім (22) у (19), отримаємо вираз для w_n

$$w_n = \frac{k_n d_n}{k_n d_n - \omega^2 a_n} \sum_{k=1}^4 A_k^0 E_{kn}^0. \quad (24)$$

$$E_{kn}^0 = \frac{1}{N_n^2} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} w_k^0 \psi_n dy. \quad (25)$$

Остаточне вираз для форми прогину пластини w прийме вид

$$w = \sum_{k=1}^4 \left(w_k^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n E_{kn}^0}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n} \psi_n \right) A_k^0, \quad (26)$$

де $\tilde{a}_n = a_n + k_n k_{01}$, $\tilde{d}_n = (Dk_n^2 + T) k_n^2 + g\Delta\rho$.

У формулу (26) входять чотири невідомі константи A_k^0 . З умови защемлення контуру пластини (20) слідують чотири лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^4 \left(B_{kj} - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{kn} B_{nj}^* \right) A_k^0 = 0, \\ \sum_{k=1}^4 C_{kj}^0 A_k^0 = 0, (j=1,2) \end{cases} \quad (27)$$

$$B_{kj} = w_k^0|_{\gamma_j}, C_{kj}^0 = \frac{dw_k^0}{dy}|_{\gamma_j}, B_{nj}^* = \psi_n|_{y=\pm\frac{b}{2}} = \begin{cases} 1, j=1, \\ (-1)^n, j=2, \end{cases} \quad (28)$$

$$\alpha_{kn} = \frac{\omega^2 a_n E_{kn}^0}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n}. \quad (29)$$

Для зручності запису контурів введений індекс j ($j=1$ відповідає контуру $y = -\frac{b}{2}$, а $j=2$ - $y = \frac{b}{2}$).

З рівності нулю визначника однорідної системи (27) слід частотне рівняння власних спільних коливань пружної пластини і рідини

$$|||C_{qk}|_{q,k=1}^4| = 0, \quad (30)$$

де

$$\begin{aligned} C_{1k} &= B_{k1} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{kn} E_{kn}^0, C_{2k} = C_{k1}^0, \\ C_{3k} &= B_{k2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{kn} E_{kn}^0 (-1)^n, C_{4k} = C_{k2}^0 (k = \overline{1,4}). \end{aligned} \quad (31)$$

Скориставшись розкладанням функції w_k^0 у ряд по повній і ортогональній системі функцій ψ_n , умовою $\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \psi_n dy = 0$ і позначенням (25), формули (26)-(27) і (30)-(31) можна переписати так

$$w = \sum_{k=1}^4 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{kn} \psi_n \right) A_k^0, \quad (32)$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{kn} B_{nj}^* A_k^0 = 0, \\ \sum_{k=1}^4 C_{kj}^0 A_k^0 = 0, (j = \overline{1, 2}). \end{cases} \quad (33)$$

$$|||C_{qk}|||_{q,k=1}^4, \quad (34)$$

$$C_{1k} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{kn} E_{kn}^0, C_{2k} = C_{1k}^0, C_{3k} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{kn} E_{kn}^0 (-1)^n, C_{4k} = C_{2k}^0 (k = \overline{1, 4}),$$

де $\beta_{nk} = \frac{k_n d_n E_{kn}^0}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n}$.

Розглянемо частотне рівняння (34) при $k_{01}\omega^2 - g\Delta\rho > 0$ ($q > 0$) і $\frac{p^4}{4} - q > 0$ (інші випадки розглядаються аналогічно). У цьому випадку фундаментальна система розв'язків рівняння (21) має вигляд $w_k^0 = \{\sinh p_1 y, \cosh p_1 y, \sinh p_2 y, \cosh p_2 y\}$, а коефіцієнти E_{kn}^0 і C_{qk} -

$$\begin{aligned} E_{1n}^0 &= \frac{2p_1 \cosh p_1^*}{b(k_n^2 + p_1^2)} [(-1)^n - 1], E_{2n}^0 = \frac{2p_1 \cosh p_1^*}{b(k_n^2 + p_1^2)} [(-1)^n + 1], \\ E_{3n}^0 &= \frac{2p_2 \cosh p_2^*}{b(k_n^2 + p_2^2)} [(-1)^n - 1], E_{4n}^0 = \frac{2p_2 \cosh p_2^*}{b(k_n^2 + p_2^2)} [(-1)^n + 1]. \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{1,2m-1}^0, C_{12} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{2,2m}^0, \\ C_{13} &= \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{3,2m-1}^0, C_{14} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{4,2m}^0, \\ C_{21} &= p_1 \cosh \tilde{p}_1, C_{22} = -p_1 \sinh \tilde{p}_1, C_{23} = p_2 \cosh \tilde{p}_2, C_{24} = -p_2 \sinh \tilde{p}_2, \\ C_{31} &= -\sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{1,2m-1}^0, C_{32} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{2,2m}^0, \\ C_{33} &= -\sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{3,2m-1}^0, C_{34} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{4,2m}^0, \\ C_{41} &= p_1 \cosh \tilde{p}_1, C_{42} = p_1 \sinh \tilde{p}_1, C_{43} = p_2 \cosh \tilde{p}_2, C_{44} = p_2 \sinh \tilde{p}_2, \end{aligned}$$

де $p_{1,2}^2 = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, $p_i^* = \frac{bp_i}{2}$ ($i = 1, 2$).

Проведемо наступні перетворення з визначником рівняння (34): складаємо перший рядок з третьої, другу з четвертої і виносимо двійку з визначника. Далі віднімаючи з першого рядка третій, другий-четвертий і, приводячи визначник до блокового вигляді з нульовими двома блоками, представимо рівняння (34) в наступному вигляді

$$\begin{pmatrix} p_2 \cosh \tilde{p}_2 \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{1,2m-1}^0 - p_1 \cosh \tilde{p}_1 \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{3,2m-1}^0 \\ -p_1 \cosh \tilde{p}_1 \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{4,2m}^0 + p_2 \cosh \tilde{p}_2 \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{2,2m}^0 \end{pmatrix} \times \quad (36)$$

Рівняння (36) розпадається на два рівняння, що описують несиметричні і симетричні частоти. З урахуванням співвідношень (35) будемо мати

$$\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\beta}_{2m-1} = 0 \text{ и } \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\beta}_{2m} = 0, \quad (37)$$

де $\tilde{\beta}_n = \frac{k_n}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n}$.

Таким чином, частотне рівняння (34) не залежить від умов $q > 0$ і $\frac{v^2}{4} - q > 0$, розпадається на непарні і парні частоти і може бути записана в єдиній формі для цих частот

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n} = 0. \quad (38)$$

Таким чином, якщо $n = 2m - 1$, то рівняння (38) описує непарні частоти, а якщо $n = 2m$, то парні частоти. Слід зазначити, що такого спрощення вдалося досягти за рахунок розкладання функції w_k^0 у ряд по повній і ортогональній системі власних функцій ψ_n і розгляді рівняння (34). При використанні рівняння (30) значно зросли б аналітичні обчислення, і такого спрощення можна було б досягти, якщо розкласти тригонометричні і гіперболічні функції на прості дробі так, як це зроблено, наприклад, в роботах [3, 5-7].

Ліва частина рівняння (38) є монотонно зростаючою функцією параметра ω^2 на інтервалі $(k_n \tilde{d}_n / \tilde{a}_n, k_{n+1} \tilde{d}_{n+1} / \tilde{a}_{n+1})$, приймаючи на ньому значення від $-\infty$ до ∞ . Отже, між двома послідовними значеннями $k_n \tilde{d}_n / \tilde{a}_n$ лежить тільки один корінь рівняння (38). Цим заздалегідь визначаються інтервали, в яких знаходяться власні частоти.

Таким чином, розглянута задача має нескінченний дискретний спектр власних значень ω_l^2 , є корінням характеристичних рівнянь (30), (35) і (38), а відповідні їм власні функції $w_l(y)$ утворюють повну ортогональну систему функцій на відрізку $[-b/2, b/2]$.

У безрозмірному вигляді частотне рівняння (38) буде мати вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n / \left\{ \left(\rho_{12} \coth \kappa_{1,n} + \coth \kappa_{2,n} + \pi n \tilde{k}_0 \right) \Omega^2 - \right. \\ \left. - \pi n \left[(\pi^2 n^2 + \gamma_0^2) \pi^2 n^2 + (1 - \rho_{12}) \tilde{g} \right] \right\} = 0, \quad (39)$$

де $\Omega^2 = \frac{\rho_2 b^5}{D} \omega^2$, $\kappa_{in} = \pi n H_i$, $H_i = \frac{h_i}{b}$, $\gamma_0^2 = \frac{T b^2}{D}$, $\tilde{k}_0 = \frac{k_{01}}{\rho_2 b}$, $\rho_{12} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$, $\tilde{g} = \frac{g b^4}{D}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n / \left\{ \left(\rho_{12} \coth \kappa_{1n} + \coth \kappa_{2n} + \pi n \tilde{k}_0 \right) \Omega^2 - \right. \\ \left. - \pi n \left(1 + \tilde{T} \pi^2 n^2 - \rho_{12} \right) \right\} = 0, \quad (40)$$

де $\Omega^2 = \frac{b}{g} \omega^2$, $\kappa_{in} = \pi n H_i$, $H_i = \frac{h_i}{b}$, $\tilde{T} = \frac{T}{g \rho_2 b^2}$, $\tilde{k}_{01} = \frac{k_{01}}{\rho_2 b}$, $\rho_{12} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$.

При $\rho_1 = 0$ ($\rho_{12} = 0$) рівняння (40) співпадає з рівнянням роботи [4].

Деякі окремі випадки вихідної задачі.

Розглянемо ряд приватних випадків вихідної задачі, а саме: виродження пластини в мембрану ($D = 0$), її відсутність ($D = T = 0$, $k_{01} = 0$), відсутність верхньої рідини ($\rho_1 = 0$) або нижньої ($\rho_2 = 0$).

Вираз пластини в мембрану. ($D = 0$).

У цьому випадку у рівнянні (38) вважаємо $D = 0$ і в безрозмірному вигляді воно прийме вигляд

Пластина, що розділяє рідини, відсутній ($D = T = 0$, $k_{01} = 0$).

В цьому випадку рівняння (14) з урахуванням виразів (13) зводиться до наступного диференціального рівнянню

$$\ddot{W}_n + \omega_n^2 W_n = 0.$$

де $W(y, t)$ — рівняння поверхні розділу рідин, а

$$\omega_n^2 = \frac{g \Delta \rho}{a_n} \quad (41)$$

ω_n^2 — квадрат частоти коливань двошарової ідеальної рідини в прямокутному каналі.

Випадок відсутності верхньої рідини ($\rho_1 = 0$).

Поклавши в частотному рівнянні (39) щільність верхньої рідини дорівнює нулю ($\rho_{12} = 0$), отримаємо рішення розглянутої задачі.

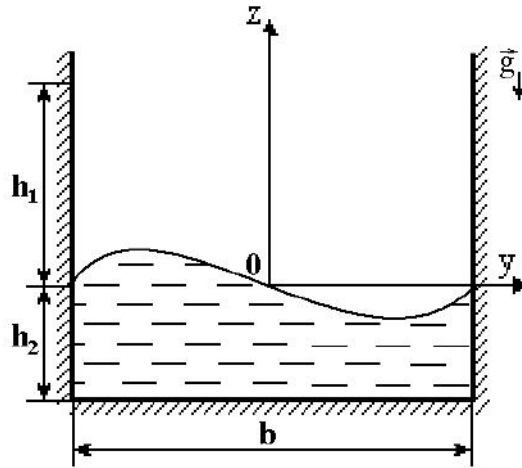


Рис. 2: Випадак відсутності верхньої рідини ($\rho_1 = 0$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(\coth \kappa_n + \pi n \tilde{k}_0\right) \Omega^2 - \pi n \left[\left(\pi^2 n^2 + \gamma_0^2\right) \pi^2 n^2 + \tilde{g}\right]} = 0, \quad (42)$$

де $\rho = \rho_2$, $h = h_2$, $\kappa_n = \kappa_{2n} = \pi n H$, $H = \frac{h}{b}$.

Випадак відсутності нижньої рідини ($\rho_2 = 0$).

Цей випадок найбільш цікавий, так як дозволяє розглянути нову задачу про власні коливання рідини в прямокутному каналі з жорстким верхнім і пружним нижнім підставами у вигляді платівки. Такий канал будемо називати «перекинутим».

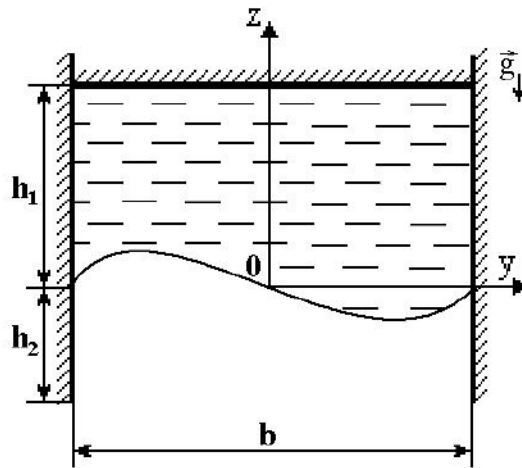


Рис. 3: Випадак відсутності нижньої рідини ($\rho_2 = 0$) – «перекинутий» канал

Поклавши в рівняннях (38) щільність нижньої рідини дорівнює нулю ($\rho_2 = 0$), отримаємо рішення розглянутої задачі і в безрозмірному вигляді воно запишеться так

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(\coth \kappa_n + \pi n \tilde{k}_0\right) \Omega^2 - \pi n \left[\left(\pi^2 n^2 + \gamma_0^2\right) \pi^2 n^2 - \tilde{g}\right]} = 0, \quad (43)$$

де $\Omega^2 = \frac{\rho b^5}{D} \omega^2$, $\rho = \rho_1$, $h = h_1$, $\kappa_n = \kappa_{1n} = \pi n H$, $H = \frac{h}{b}$.

Цікаво відзначити, що частотне рівняння (43) також впливає з частотного рівняння (42), якщо в ньому формально покласти $g := -g$, тобто розглянути «перекинутий» канал (див. рис. 4 і рис. 5).

Чисельні дослідження.

Чисельні дослідження частотних рівнянь (39)-(40), (42)-(43) були проведені для наступних значень безрозмірних параметрів: $\rho_{12} = 0, 0.5, 1, 2$; $\gamma_0^2 = 0.50$; $T = 0, 0.5, 1, 2$; $\tilde{g} = 0, 1, 10, 100, 1000$; $H_i = 0.5, 1, 1.5$; $\tilde{k}_0 = 0, 0.5, 1$ з урахуванням десяти членів у рядах цих рівнянь.

На рис. 4-7 представлені графіки залежності квадрата першої безрозмірною несиметричною частоти від безрозмірної величини натягу γ_0^2 для випадку невагомості ($\tilde{g} = 0$) і $\rho_{12} = 0.5$ (рис. 4), $\rho_{12} = 1.0$ (рис. 5) і $\rho_{12} = 2.0$ (рис. 7). На рис. 8-9 наведені аналогічні графіки для $\tilde{g} = 10$. На всіх малюнках $H_1 = H_2 = 1$, а значенню $\tilde{k}_0 = 0$ відповідає верхній графік, $\tilde{k}_0 = 0.5$ — середній графік і $\tilde{k}_0 = 1.0$ — нижній графік (рис.8 це вірно для $\gamma_0^2 < 40$).

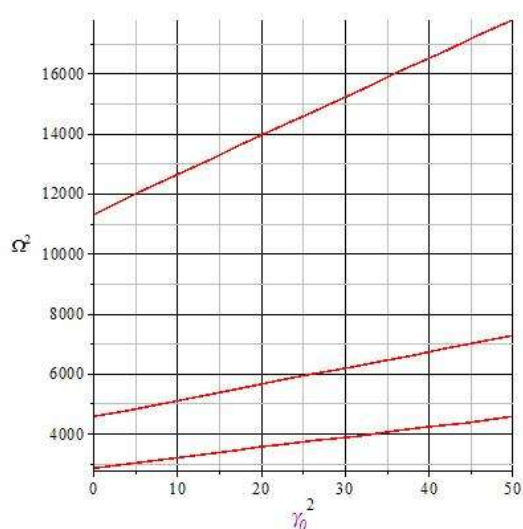


Рис. 4: Залежність квадрата першої безрозмірною несиметричною частоти від величини γ_0^2 при $\rho_{12} = 0.5$ і $\tilde{g} = 0$

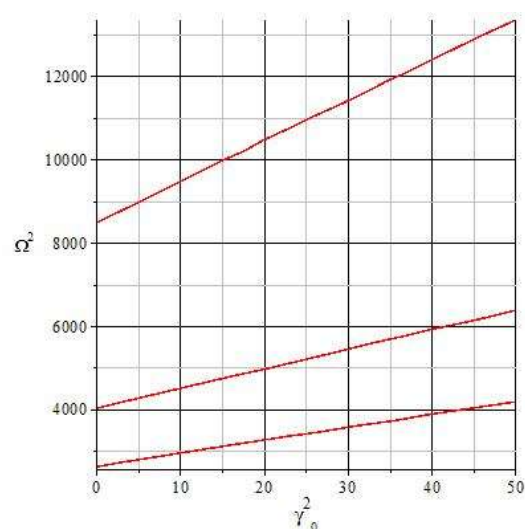


Рис. 5: Залежність квадрата першої безрозмірною несиметричною частоти від величини γ_0^2 при $\rho_{12} = 1.0$ і $\tilde{g} = 0$

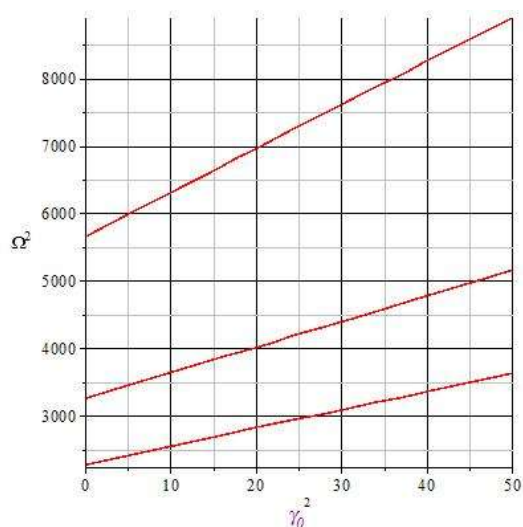


Рис. 6: Залежність квадрата першої безрозмірною несиметричною частоти від величини γ_0^2 при $\rho_{12} = 2.0$ і $\tilde{g} = 0$

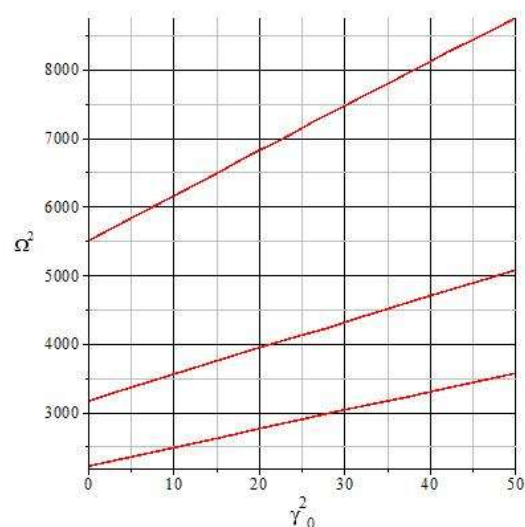


Рис. 7: Залежність квадрата першої безрозмірною несиметричною частоти від величини γ_0^2 при $\rho_{12} = 2.0$ і $\tilde{g} = 100$

З рис.4-9 видно, що графіки для симетричних частот якісно не відрізняються від графіків для несиметричних частот і, як правило, значення парних частот приблизно в п'ять разів більше відповідних

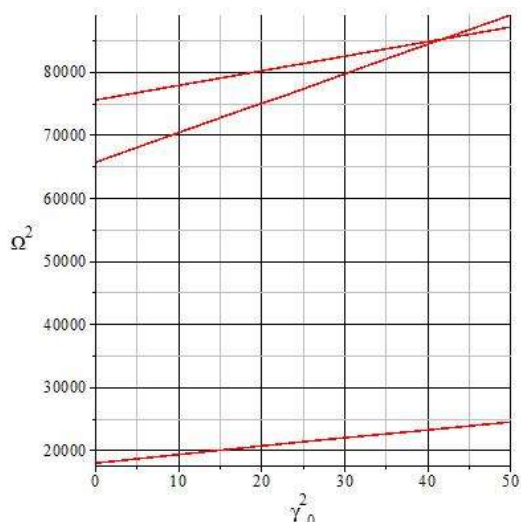


Рис. 8: Залежність квадрата першої безрозмірною несиметричною частоти від величини γ_0^2 при $\rho_{12} = 0.5$ і $\tilde{g} = 100$

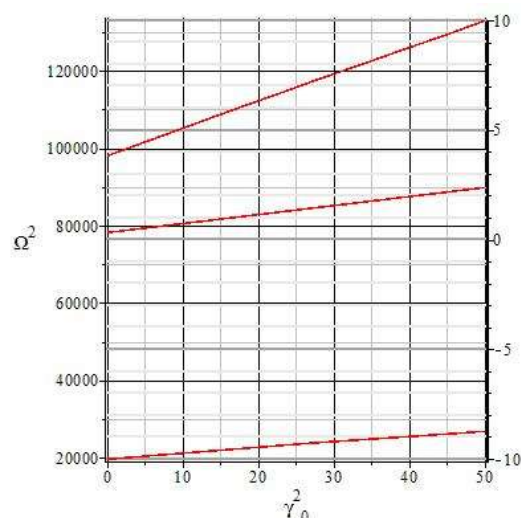


Рис. 9: Залежність квадрата першої безрозмірною несиметричною частоти від величини γ_0^2 при $\rho_{12} = 0.0$ і $\tilde{g} = 1.0$

непарних значень частот. Однак, слід зауважити, що графіки несиметричних частот для різних значень безрозмірної маси майже паралельні, а для симетричних частот цього не спостерігається.

На підставі проведених аналітичних і чисельних досліджень можна зробити наступні загальні висновки як для парних, так і непарних частот:

1. При збільшенні попереднього натягу пластини або при зменшенні жорсткості пластини частоти зростають. Залежність квадрата безрозмірної частоти від величини лінійна.
2. Із збільшенням перевантаження частоти убувають. Відзначається дуже слабка залежність квадрата безрозмірної частоти від величини.
3. С зменшенням щільності верхньої рідини частоти зростають і приймають найбільше значення при відсутності верхньої рідини, а зі збільшенням щільності верхньої рідини частоти убувають і при малій згинальній жорсткості і малому натягу пластини можуть звернутися в нуль, що призведе до втрати стійкості плоскої форми рівноваги пластини.
4. З зменшенням маси пластини частоти зростають і приймають найбільше значення при відсутності маси, тобто для безінерційних пластин.
5. Зменшення частот відбувається із збільшенням глибини заповнення верхньої рідини або із зменшенням глибини заповнення нижньої рідини.

Робота містить результати досліджень, проведених за грантової підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень за конкурним проектом № Ф71/80-2016.

Література

- [1] Ильгамов М.А., Сахабутдинов Ж.М. Об устойчивости упругой пластины между жидкостями разной плотности // Изб. проблемы прикл. механики. Сб. статей к шестидесятилетию акад. Н. Челомея. — М., 1974. — С. 341–346.
- [2] Ильгамов М.А. Введение в нелинейную гидроупругость. — М.: Наука, 1991. — 200 с.
- [3] Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Свободные колебания двухслойной жидкости, разделенной упругой пластинкой в прямоугольном канале // Прикл. механика. — 1995. — Т. 31. № 8 — С. 74–80.
- [4] Троценко В.А. Свободные колебания жидкости в прямоугольном канале с упругой мембраной на свободной поверхности // Теор. и прикл. механика. — 2002. — Вып. 36. — С. 170–176.
- [5] Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на "свободной" и внутренней поверхностях // Акустичний вісник. — 2003. — Т. 6. № 4 — С. 44–52.
- [6] Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Свободные колебания упругих мембран и двухслойной жидкости в прямоугольном канале с упругим дном // Прикл. гідромеханіка. — 2008. — № 1 — С. 33–38.

- [7] Кононов Ю.Н., Дидок Н.К., Джуха Ю.А. О решении обобщенного неоднородного бигармонического уравнения в задачах гидроупругости // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А. — 2014. — Вип. 1 — С. 64–69.
- [8] Кононов Ю.Н., Русаков В.Ф., Джуха Ю.А. О решении обобщенного неоднородного бигармонического уравнения в задачах гидроупругости // Вісн. Запорізького національного ун-ту. Сер. Фіз.-мат. наук. — 2015. — №. 2 — С. 105–114.
- [9] Кононов Ю.Н., Шевченко В.П., Джуха Ю.А. Осесимметричные колебания двухслойной идеальной жидкости со свободной поверхностью в жестком круговом цилиндрическом резервуаре с упругим дном // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки — 2015. — №. 1-2 — С. 116–125.
- [10] Кононов Ю.Н., Джуха Ю.А. Осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости в жестком кольцевом цилиндрическом резервуаре // Вісн. Запорізького національного ун-ту. Сер. Фіз.-мат. наук. — 2016. — №. 1 — С. 103–115.
- [11] Гончаров Д.А. Осесимметричные колебания двухплотностной жидкости в цилиндрическом баке // Электронное научно-техническое издание: Наука и образование. — 2012. — №. 4 [Электронный ресурс] URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/362856.html> (дата обращения: 19.02.2014).
- [12] Гончаров Д.А. Динамика двухслойной жидкости, разделенной упругой перегородкой с учетом сил поверхностного натяжения // Электронное научно-техническое издание: Наука и образование. — 2013. — №. 11. DOI:10.7463/1113.0619258 [Электронный ресурс] URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/619258.html> (дата обращения: 19.02.2014).
- [13] Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения // Инженерный журнал: наука и инновации. — 2013. — Вып. 12. [Электронный ресурс] URL: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html> (дата обращения: 19.02.2014).
- [14] Кононов Ю.Н., Лымарь А.А. Осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости в жестком кольцевом цилиндрическом резервуаре // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки — 2015. — №. 1-2 — С. 97–108.
- [15] Кононов Ю.М., Лымарь О.О. Стійкість коливань пластини, яка розділяє ідеальні рідини різною густини у прямокутному каналі [Електронний ресурс] // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання - 2016 25-27 травня 2016, Львів, Україна / Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. — Львів, 2016. — Режим доступу: <http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Lymar.pdf>. — Дата звернення: 16.08.16. — Стійкість коливань пластини, яка розділяє ідеальні рідини різною густини у прямокутному каналі.
- [16] Кононов Ю.Н., Лымарь А.А. Колебания пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале // Тези доповідей XVI Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми технічної механіки - 2016», 18 - 21 квітня 2016 р, Дніпродзержинськ. — С. 14.

КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, РАЗДЕЛЯЮЩЕЙ ИДЕАЛЬНЫЕ ЖИДКОСТИ РАЗНОЙ ПЛОТНОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ С ЖЕСТКИМИ ОСНОВАНИЯМИ

Кононов Ю.Н., Лымарь О.О.

РЕЗЮМЕ

В линейной постановке выведено частотное уравнение собственных колебаний пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жесткими основаниями. Полученная единственная форма частотного уравнения как для симметричных, так и несимметричных совместных колебаний пластины и жидкости. Рассмотрены различные предельные случаи: вырождение пластины в мембрану, ее отсутствие, случай отсутствия верхней или нижней жидкости. Для широкого круга параметров рассматриваемой механической системы приведено и проанализировано численные исследования.

Ключевые слова: гидроупругость, прямоугольная пластина, плоские колебания, двухслойная идеальная несжимаемая жидкость.

STABILITY OF NON-SYMMETRIC RIGID BODY ROTATION WITH PROVISION OR DISSIPATIVE AND CONSTANT TORQUE

Kononov Yu., Lymar O.

SUMMARY

In a linear formulation, the frequency equation of the natural oscillations of a plate separating ideal fluids of different density in a rectangular channel with rigid bases is deduced. The only form of the frequency equation

for both symmetric and asymmetric joint vibrations of a plate and a liquid is obtained. Various limiting cases are considered: the degeneration of the plate into the membrane, its absence, the case of the absence of an upper or lower liquid. For a wide range of parameters of the mechanical system under consideration, numerical studies are presented and analyzed.

Key words: hydro-elasticity, rectangular plate, plane oscillations, two-layer ideal incompressible fluid.