УДК 533.6.013.42

Кононов Ю.М., Шевченко В.П., Джуха Ю.О.

[1] **доктор фізико-математичних наук, професор кафедри прикладної математики і комп'ютерних технологій Донецького національного університету**

[2] **академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри прикладної математики і комп'ютерних технологій Донецького національного університету**

[3] **асистент кафедри прикладної математики і комп'ютерних технологій Донецького національного університету**

ПОЗДОВЖНІ КОЛИВАННЯ В НЕВАГОМОСТІ ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ, ЩО ЗНАХОДИТЬСЯ В ЖОРСТКОМУ КІЛЬЦЕВОМУ ЦИЛІНДРИЧНОМУ РЕЗЕРВУАРІ З ПРУЖНИМИ ОСНОВАМИ

Виписане і проаналізоване частотне рівняння власних поздовжніх (осесиметричних) коливань ідеальної нестисливої рідини в невагомості, що знаходиться в жорсткому кільцевому циліндричному резервуарі з пружними основами у вигляді тонких кільцевих пластин. Обчислені невідомі коефіцієнти частотного рівняння для різних граничних випадків виродження кільцевих пластин в кругові, в мембрани, в абсолютно жорсткі пластини. Оцінений вплив невагомості та механічних параметрів на частотний спектр.

Ключові слова: *гідропружність, кільцеві пластини, ідеальна нестислива рідина, осесиметричні коливання, пружні ізотропні пластини.*

Вступ

В роботах [1–5] виведене частотне рівняння власних осесиметричних коливань ідеальної нестисливої рідини в жорсткому циліндричному резервуарі з пружними основами. Однак для випадку невагомості були проведені тільки часткові дослідження. Так, наприклад, показано, що поздовжні (осесиметричні) коливання будуть неможливі в невагомості, якщо одна з основ стає абсолютно жорсткою. Найбільш повний опис несиметричних коливань рідини в жорсткому циліндричному резервуарі з одною пружною основою приведений в монографії [6]. В статті [7] даний розв'язок узагальненого неоднорідного бігармонічного рівняння, яке виникає в задачі про коливання ідеальної рідини в жорсткому циліндричному резервуарі з пружними основами. Ця задача, мабуть, вперше була розглянута з позиції функціонального аналізу в статті [8] і монографії [9]. Найбільш повний огляд літератури за цією темою приведений в [1–3]. З останніх робіт з даної тематики з ближнього зарубіжжя варто відмітити статті [10–12], в яких розглядаються осесиметричні коливання двошарової рідини стосовно проблеми капілярних фазороздільників. Із англомовних робіт слід відзначити [13–16].

Дана стаття продовжує дослідження, початі в роботах [1–5], на випадок невагомості. Виписане та досліджене частотне рівняння власних осесиметричних коливань ідеальної нестисливої рідини в жорсткому кільцевому циліндричному резервуарі з пружними основами у вигляді тонких кільцевих пластин. Обчислені невідомі коефіцієнти частотного рівняння для різних граничних випадків виродження кільцевих пластин в кругові, в мембрани, в абсолютно жорсткі пластини. Оцінений вплив невагомості та механічних параметрів на частотний спектр. Для широкого кола параметрів механічної системи, що розглядається, проведені та проаналізовані чисельні дослідження.

Постановка задачі

Розглянемо сумісні коливання в невагомості пружних основ кільцевого циліндра та ідеальної нестисливої рідини. Рідина густини ρ і глибини h повністю заповнює жорсткий прямий циліндричний резервуар зовнішнього радіусу a і внутрішнього $a\varepsilon$ ($0 \leqslant \varepsilon < 1$). Основи циліндричного резервуару являють собою закріплені тонкі кільцеві ізотропні пластини з жорсткістю прогину D_i , що знаходяться під впливом розтягуючих зусиль T_i в серединній площині ($i = 1, 2$). Індекс $i = 1$ відповідає верхній основі, а $i = 2$ – нижній. Для зручності запису будуть введені додаткові індекси j для позначення контурів (індекс $j = 1$ відповідає зовнішньому контуру γ_1 , а $j = 2$ – внутрішньому γ_2). Задачу будемо розглядати в лінійній постановці, рух рідини вважатимемо потенціальним, а сумісні коливання пластин і рідини – безвідривними.

Частотне рівняння власних сумісних коливань в невагомості ідеальної рідини та пружних основ має вигляд [1–3]:

$$\left|\left\|C_{qr}\right\|_{q,r=1}^{9}\right| = 0. \tag{1}$$

Тут

$$\begin{gathered}
C_{i+j-1,k} = B_{ijk} + k_2\tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n}E_{1kn}^0 B_{jn}^*,\\
C_{i+j-1,k+4} = -k_2\tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n}E_{2kn}^0 B_{jn}^*, \quad C_{i+j-1,9} = k^*,\\
C_{i+j,k} = C_{ijk}, \quad C_{i+j,k+4} = 0, \quad C_{i+j,9} = 0 \quad (i=1, j=1, k=\overline{1,4}),\\
C_{i+j,k} = B_{ijk} + k_2\tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n}E_{1kn}^0 B_{jn}^*,\\
C_{i+j,k+4} = -k_2\tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n}E_{2kn}^0 B_{jn}^*, \quad C_{i+j,9} = k^*,\\
C_{i+j+1,k} = C_{ijk}, \quad C_{i+j+1,k+4} = 0, \quad C_{i+j+1,9} = 0 \quad (i=1, j=2, k=\overline{1,4}),\\
C_{i+j+2,k} = k_1\tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n}E_{1kn}^0 B_{jn}^*,\\
C_{i+j+2,k+4} = B_{ijk} - k_1\tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n}E_{2kn}^0 B_{jn}^*, \quad C_{i+j+2,9} = k^*,\\
C_{i+j+3,k} = 0, \quad C_{i+j+3,k+4} = C_{ijk}, \quad C_{i+j+3,9} = 0 \quad (i=2, j=1, k=\overline{1,4}),\\
C_{i+j+3,k} = k_1\tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n}E_{1kn}^0 B_{jn}^*,\\
C_{i+j+3,k+4} = B_{ijk} - k_1\tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n}E_{2kn}^0 B_{jn}^*, \quad C_{i+j+3,9} = k^*,\\
C_{i+j+4,k} = 0, \quad C_{i+j+4,k+4} = C_{ijk}, \quad C_{i+j+4,9} = 0 \quad (i=2, j=2, k=\overline{1,4}),\\
C_{9,k} = \tilde{k}_{12}\tilde{w}_{1k}^0, \quad C_{9,k+4} = \tilde{k}_{21}\tilde{w}_{2k}^0, \quad C_{9,9} = \tilde{k} \quad (k=\overline{1,4}),
\end{gathered} \tag{2}$$

де

$$\begin{gathered}
a_{11n} = D_{1n}D_{2n}^*, \quad a_{12n} = -d_{1n}^*, \quad a_{21n} = -d_{2n}^*, \quad a_{22n} = D_{2n}D_{1n}^*,\\
\tilde{d}_{in} = \frac{\rho\omega^2}{d_{in}k_n \sinh\kappa_n}, \quad d_{in}^* = \frac{\tilde{d}_{in}}{\Delta_n}, \quad D_{in} = \tilde{d}_{in}\sinh\kappa_n,\\
D_{in}^* = \frac{\coth\kappa_n - D_{in}}{\Delta_n}, \quad \Delta_n = 1 - (D_{1n} + D_{2n})\coth\kappa_n + D_{1n}D_{2n},\\
d_{in} = \left(D_i k_n^2 + T_i\right)k_n^2 - k_{0i}\omega^2, k_i = \frac{k_{0i}}{k_{01} - k_{02}}, k^* = \frac{1}{k_{01} - k_{02}},\\
\kappa_n = k_n h, \tilde{k}_{12} = k_{01}\left(\rho h + 2k_{02}\right), \tilde{k}_{21} = -k_{02}\left(\rho h + 2k_{01}\right),\\
\tilde{k} = \rho h + k_{01} + k_{02}.
\end{gathered} \tag{3}$$

$$B_{ijk} = \left.w_{ik}^0\right|_{\gamma_j}, C_{ijk} = \left.\frac{dw_{ik}^0}{dr}\right|_{\gamma_j}, B_{jn}^* = \left.Z_0\left(\frac{r}{a}\right)\right|_{\gamma_j} \quad (i,j=\overline{1,2},\ k=\overline{1,4}), \tag{4}$$

$$E_{ikn}^0 = \frac{1}{N_n^2}\int_S w_{ik}^0\psi_n dS, \quad \widetilde{w}_{ik}^0 = \frac{1}{S}\int_S w_{ik}^0 dS, \tag{5}$$

$N_n^2 = \int_S \psi_n^2 dS$, $\psi_n(r) = J_0(k_n r) + \gamma_n Y_0(k_n r)$, $\gamma_n = -J_1(\xi_n)/Y_1(\xi_n)$, $k_n = \xi_n/a$, ξ_n – корені рівняння $J_1(\xi_n)Y_1(\xi_n\varepsilon) - J_1(\xi_n\varepsilon)Y_1(\xi_n) = 0$, а при $\varepsilon = 0$ – $J_1(\xi_n) = 0$, де J_m і Y_m – функції Бесселя першого і другого роду, $Z_0(x) = J_0(\xi_n x) + \gamma_n Y_0(\xi_n x)$; $k_{0i} = \rho_{0i}\delta_{0i}$; ρ_{0i} та δ_{0i} – щільність і товщина i-ої пластини; S – кільцева область; w_{ik}^0 – чотири лінійно незалежних розв'язки однорідного бігармонічного рівняння

$$D_i\Delta_2^2 w_{ik}^0 - T_i\Delta_2 w_{ik}^0 - k_{0i}\omega^2 w_{ik}^0 = 0. \tag{6}$$

Частотне рівняння (1) симетричне відносно індексів 1 і 2, що має фізичне пояснення і підтверджує правильність виведеного рівняння. Частотний спектр цього рівняння складається з трьох наборів частот, що характеризують коливання першої й другої пружних основ і стовпа рідини між ними як одного цілого.

За відсутності попередніх натягів пластин ($T_1 = T_2 = 0$) в монографії [9] була отримана наступна асимптотична формула для квадрата частоти при $n \to \infty$:

$$\omega_n^2 = 16\pi^2 n^2 \frac{D_1 D_2}{\sqrt{k_{01} D_2} + \sqrt{k_{02} D_1}} \left[1 + o(1)\right], \tag{7}$$

а також відмічено, що великі за номером n моди власних сумісних коливань пластин і рідини пов'язані головним чином з коливанням пластин, і вплив наявності рідини на них незначний. Фізично такий висновок є очевидним, оскільки великим номерам n відповідають коливання рідини лише біля пластин і ці коливання експоненційно згасають при відході від них. Тому при великих n примикаючі шари рідини, що долучаються до коливань пластин, стають зневажно малими, тобто не впливають на асимптотичну поведінку частот.

Варто відмітити, що частотне рівняння (1) має особливості при $k_{01} = k_{02}$, $\Delta_n = 0$, $d_{in} = 0$, які необхідно враховувати при проведенні чисельних розрахунків. Особливість при $k_{01} = k_{02}$ є усувною, що, напевно, пов'язано з явищем невагомості.

Окремі випадки частотного рівняння власних сумісних коливань пружних основ і рідини

Отримане рівняння (1) є доволі загальним і включає в себе ряд окремих випадків, що представляють самостійний інтерес.

Перша основа ($i = 1$) вироджується в мембрану.

В цьому випадку у визначнику рівняння (1) потрібно викреслити другий і четвертий рядки і другий і четвертий стовпці, а в коефіцієнті d_{1n} в співвідношеннях (3) покласти $D_1 = 0$.

Друга основа ($i = 2$) вироджується в мембрану.

Як і в попередньому випадку, у визначнику рівняння (1) потрібно викреслити шостий і восьмий рядки і шостий і восьмий стовпці, а в коефіцієнті d_{2n} в співвідношеннях (3) вважати $D_2 = 0$.

Перша і друга основи вироджуються в мембрани.

В цьому випадку у визначнику рівняння (1) потрібно викреслити другий, четвертий, шостий і восьмий рядки і другий, четвертий, шостий і восьмий стовпці, а в коефіцієнтах d_{1n} і d_{2n} відповідно покласти $D_1 = 0$ і $D_2 = 0$.

Перша або друга основа абсолютно жорстка.

Якщо перша чи друга пластина стає абсолютно жорсткою, то $w_1 = 0$ ($\tilde{w}_{1k}^0 \equiv 0$) або $w_2 = 0$ ($\tilde{w}_{2k}^0 \equiv 0$). Переходячи до границі в рівнянні (1) відповідно при $T_1 \to \infty$ ($D_{1n} \to 0$) або при $T_2 \to \infty$ ($D_{2n} \to 0$), отримаємо частотні рівняння: в першому випадку

$$\left| \left\| C_{qr} \right\|_{q,r=5}^{9} \right| = 0, \tag{8}$$

а в другому —

$$\left| \left\| C_{qr} \right\|_{q,r=1}^{5} \right| = 0. \tag{9}$$

Варто відмітити, що рівняння (8) і (9) можна істотно спростити. На прикладі кругового циліндра це буде показано в підпункті 5.4

Виродження кільцевого циліндра в круговий ($\varepsilon = 0$).

Індекс j опустимо. В цьому випадку часотне рівняння (17) матиме вигляд:

$$\left| \left\| C_{qr} \right\|_{q,r=1}^{5} \right| = 0. \tag{10}$$

Тут

$$C_{1,k} = B_{1k} + k_2\tilde{w}^0_{1k} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n}E^0_{1kn}B^*_n,$$
$$C_{1,k+2} = -k_2\tilde{w}^0_{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n}E^0_{2kn}B^*_n,\ C_{1,5} = k^*,$$
$$C_{2,k} = \tilde{C}_{1k},\ C_{2,k+2} = 0,\ C_{2,5} = 0,$$
$$C_{3,k} = k_1\tilde{w}^0_{1k} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{21n}E^0_{1kn}B^*_n,$$
$$C_{3,k+2} = B_{2k} - k_1\tilde{w}^0_{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n}E^0_{2kn}B^*_n,\ C_{3,5} = k^*,$$
$$C_{4,k} = 0,\ C_{4,k+2} = \tilde{C}_{2k},\ C_{4,5} = 0,$$
$$C_{5,k} = \tilde{k}_{12}\tilde{w}^0_{1k},\ C_{5,k+2} = \tilde{k}_{21}\tilde{w}^0_{2k},\ C_{5,5} = \tilde{k}.$$

5.1 Перша пластина ($i = 1$) вироджується в мембрану. В цьому випадку частотне рівняння (10) запишеться так:

$$\left| \left\| C_{qr} \right\|^4_{q,r=1} \right| = 0, \tag{11}$$

де

$$C_{11} = B_{11} + k_2\tilde{w}^0_{11} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n}E^0_{11n}B^*_n,\ C_{12} = -k_2\tilde{w}^0_{21} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n}E^0_{21n}B^*_n,$$
$$C_{13} = -k_2\tilde{w}^0_{22} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n}E^0_{22n}B^*_n,\ C_{14} = k^*,$$
$$C_{21} = k_1\tilde{w}^0_{11} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{21n}E^0_{11n}B^*_n,\ C_{22} = B_{21} - k_1\tilde{w}^0_{21} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n}E^0_{21n}B^*_n,$$
$$C_{23} = B_{22} - k_1\tilde{w}^0_{22} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n}E^0_{22n}B^*_n,\ C_{24} = k^*,$$
$$C_{31} = 0,\ C_{32} = \tilde{C}_{21},\ C_{33} = \tilde{C}_{22},\ C_{34} = 0,$$
$$C_{41} = \tilde{k}_{12}\tilde{w}^0_{11},\ C_{42} = \tilde{k}_{21}\tilde{w}^0_{21},\ C_{43} = \tilde{k}_{21}\tilde{w}^0_{22},\ C_{44} = \tilde{k}.$$

5.2 Друга пластина ($i = 2$) вироджується в мембрану. В цьому випадку частотне рівняння (10) матиме вигляд:

$$\left| \left\| C_{qr} \right\|^4_{q,r=1} \right| = 0, \tag{12}$$

Тут

$$C_{11} = B_{11} + k_2\tilde{w}^0_{11} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n}E^0_{11n}B^*_n,$$
$$C_{12} = B_{12} + k_2\tilde{w}^0_{12} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n}E^0_{12n}B^*_n,$$
$$C_{13} = -k_2\tilde{w}^0_{21} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n}E^0_{21n}B^*_n,\ C_{14} = k^*,$$
$$C_{21} = \tilde{C}_{11},\ C_{22} = \tilde{C}_{12},\ C_{23} = 0,\ C_{24} = 0,$$
$$C_{31} = k_1\tilde{w}^0_{11} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{21n}E^0_{11n}B^*_n,\ C_{32} = k_1\tilde{w}^0_{12} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{21n}E^0_{12n}B^*_n,$$
$$C_{33} = B_{21} - k_1\tilde{w}^0_{21} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n}E^0_{21n}B^*_n,\ C_{34} = k^*,$$
$$C_{41} = \tilde{k}_{12}\tilde{w}^0_{11},\ C_{42} = \tilde{k}_{12}\tilde{w}^0_{12},\ C_{43} = \tilde{k}_{21}\tilde{w}^0_{21},\ C_{44} = \tilde{k}.$$

5.3 Перша і друга пластини вироджуються в мембрани. В цьому випадку частотне рівняння (10) запишеться так:

$$\left|\left\|C_{qr}\right\|_{q,r=1}^{3}\right| = 0, \tag{13}$$

де

$$C_{11} = B_{11} + k_2\tilde{w}_{11}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n}E_{11n}^0 B_n^*,$$
$$C_{12} = -k_2\tilde{w}_{21}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n}E_{21n}^0 B_n^*,\ C_{13} = k^*,$$
$$C_{21} = k_1\tilde{w}_{11}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{21n}E_{11n}^0 B_n^*,$$
$$C_{22} = B_{21} - k_1\tilde{w}_{21}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n}E_{21n}^0 B_n^*,\ C_{23} = k^*,$$
$$C_{31} = \tilde{k}_{12}\tilde{w}_{11}^0,\ C_{32} = \tilde{k}_{21}\tilde{w}_{21}^0,\ C_{33} = \tilde{k}.$$

5.4 Перша або друга пластина абсолютно жорстка. В цьому випадку частотні рівняння (8) і (9) матимуть відповідно вигляд: в першому випадку ($T_1 \to \infty$)

$$C_{22}B_{21} - C_{21}B_{22} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n}\left(C_{22}E_{21n}^0 - C_{21}E_{22n}^0\right)B_n^* = 0, \tag{14}$$

а в другому –

$$C_{11}B_{12} - C_{12}B_{11} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n}\left(C_{11}E_{12n}^0 - C_{12}E_{12n}^0\right)B_n^* = 0. \tag{15}$$

Для несиметричних коливань рівняння (15) було докладно досліджене в [6].

Варто відмітити різницю між рівнянням (1) при $\varepsilon \to 0$ і рівнянням (10). Рівняння (1) при $\varepsilon \to 0$ описує коливання механічної системи, що розглядається, при нерухомих (закріплених) центрах.

Таким чином, для проведення досліджень і розрахунків за отриманими частотними рівняннями необхідно знайти чотири лінійно незалежних розв'язки (фундаментальну систему розв'язків) w_{ik}^0 узагальненого бігармонічного рівняння (6) і обчислити коефіцієнти E_{ikn}^0 і $\tilde{w}_{ik}^0$. У випадку однозв'язної області, тобто для кола ($\varepsilon = 0$), і при виродженні пластини в кільцеву мембрану, буде достатньо двох лінійно незалежних розв'язків, а для кругової мембрани – одного розв'язку.

Фундаментальна система розв'язків w_k^0 і значення коефіцієнтів $\tilde{w}_k^0$, E_{kn}^0, обчислених за формулами (5) для кільцевої пластини в найбільш загальному випадку ($\varepsilon \neq 0$, $D \neq 0$, $k_0 \neq 0$), матимуть вигляд [7]:

$$w_k^0 = \left\{J_0\left(\mu_1\frac{r}{a}\right),\ Y_0\left(\mu_1\frac{r}{a}\right),\ I_0\left(\mu_2\frac{r}{a}\right),\ K_0\left(\mu_2\frac{r}{a}\right)\right\}, \tag{16}$$

$$\begin{gathered}
\tilde{w}_k^0 = \left\{\frac{2\left[J_1(\mu_1) - \varepsilon J_1(\varepsilon\mu_1)\right]}{\mu_1\left(1-\varepsilon^2\right)},\ \frac{2\left[Y_1(\mu_1) - \varepsilon Y_1(\varepsilon\mu_1)\right]}{\mu_1\left(1-\varepsilon^2\right)}\right. \\
\left.\frac{2\left[I_1(\mu_2) - \varepsilon I_1(\varepsilon\mu_2)\right]}{\mu_2\left(1-\varepsilon^2\right)},\ -\frac{2\left[K_1(\mu_2) - \varepsilon K_1(\varepsilon\mu_2)\right]}{\mu_2\left(1-\varepsilon^2\right)}\right\}, \\
E_{1n}^0 = \frac{2\mu_1\left(J_1(\mu_1)Z_0(1) - \varepsilon J_1(\varepsilon\mu_1)Z_0(\varepsilon)\right)}{\left(\mu_1^2 - \xi_n^2\right)\tilde{N}_n^2}, \\
E_{2n}^0 = \frac{2\mu_1\left(Y_1(\mu_1)Z_0(1) - \varepsilon Y_1(\varepsilon\mu_1)Z_0(\varepsilon)\right)}{\left(\mu_1^2 - \xi_n^2\right)\tilde{N}_n^2}, \\
E_{3n}^0 = \frac{2\mu_2\left(I_1(\mu_2)Z_0(1) - \varepsilon I_1(\varepsilon\mu_2)Z_0(\varepsilon)\right)}{\left(\mu_2^2 + \xi_n^2\right)\tilde{N}_n^2}, \\
E_{4n}^0 = -\frac{2\mu_2\left(K_1(\mu_2)Z_0(1) - \varepsilon K_1(\varepsilon\mu_2)Z_0(\varepsilon)\right)}{\left(\mu_2^2 + \xi_n^2\right)\tilde{N}_n^2},
\end{gathered} \tag{17}$$

де $\mu_1^2 = p + \sqrt{p^2 - q}$, $\mu_2^2 = -p + \sqrt{p^2 - q}$, $p = -\frac{Ta}{2D} \leqslant 0$, $q = -\frac{k_0\omega^2 a^2}{D} \leqslant 0$, $\tilde{N}_n^2 = Z_0^2(1) - \varepsilon^2 Z_0^2(\varepsilon)$.

Для кругової пластини ($\varepsilon = 0$) отримаємо:

$$w_k^0 = \left\{ J_0\left(\mu_1 \frac{r}{a}\right), I_0\left(\mu_2 \frac{r}{a}\right) \right\}, \tilde{w}_k^0 = \left\{ \frac{2J_1(\mu_1)}{\mu_1}, \frac{2I_1(\mu_2)}{\mu_2} \right\}, \tag{18}$$

$$E_{1n}^0 = \frac{2\mu_1 J_1(\mu_1)}{(\mu_1^2 - \xi_n^2) J_0(\xi_n)}, E_{2n}^0 = \frac{2\mu_2 I_1(\mu_2)}{(\mu_2^2 + \xi_n^2) J_0(\xi_n)} \tag{19}$$

У випадку виродження кільцевої пластини в мембрану ($\varepsilon \neq 0$, $D = 0$, $T \neq 0$, $k_0 \neq 0$) матимемо:

$$\begin{gathered} w_k^0 = \left\{ J_0\left(\mu \frac{r}{a}\right), Y_0\left(\mu \frac{r}{a}\right) \right\}, \\ \tilde{w}_k^0 = \left\{ \frac{2\left[J_1(\mu) - \varepsilon J_1(\varepsilon\mu)\right]}{\mu(1-\varepsilon^2)}, \frac{2\left[Y_1(\mu) - \varepsilon Y_1(\varepsilon\mu)\right]}{\mu(1-\varepsilon^2)} \right\}, \end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered} E_{1n}^0 = \frac{2\mu\left(J_1(\mu)Z_0(1) - \varepsilon J_1(\varepsilon\mu)Z_0(\varepsilon)\right)}{(\mu^2 - \xi_n^2)\tilde{N}_n^2}, \\ E_{2n}^0 = \frac{2\mu\left(Y_1(\mu)Z_0(1) - \varepsilon Y_1(\varepsilon\mu)Z_0(\varepsilon)\right)}{(\mu^2 - \xi_n^2)\tilde{N}_n^2}. \end{gathered} \tag{21}$$

Для кругової мембрани ($\varepsilon = 0$) отримаємо:

$$w_k^0 = J_0\left(\mu \frac{r}{a}\right), \tilde{w}_k^0 = \frac{2J_1(\mu)}{\mu}, E_{1n}^0 = \frac{2\mu_1 J_1(\mu)}{(\mu^2 - \xi_n^2) J_0(\xi_n)}, \tag{22}$$

де $\mu^2 = \frac{k_0\omega^2 a^2}{T}$.

У випадку відсутності попереднього натягу в кільцевої пластини ($\varepsilon \neq 0$, $D \neq 0$, $T = 0$, $k_0 \neq 0$), матимемо:

$$w_k^0 = \left\{ J_0\left(\mu \frac{r}{a}\right), Y_0\left(\mu \frac{r}{a}\right), I_0\left(\mu \frac{r}{a}\right), K_0\left(\mu \frac{r}{a}\right) \right\}, \tag{23}$$

$$\begin{gathered} \tilde{w}_k^0 = \left\{ \frac{2\left[J_1(\mu) - \varepsilon J_1(\varepsilon\mu)\right]}{\mu(1-\varepsilon^2)}, \frac{2\left[Y_1(\mu) - \varepsilon Y_1(\varepsilon\mu)\right]}{\mu(1-\varepsilon^2)}, \right. \\ \left. \frac{2\left[I_1(\mu) - \varepsilon I_1(\varepsilon\mu)\right]}{\mu(1-\varepsilon^2)}, -\frac{2\left[K_1(\mu) - \varepsilon K_1(\varepsilon\mu)\right]}{\mu(1-\varepsilon^2)} \right\}, \\ E_{1n}^0 = \frac{2\mu\left(J_1(\mu)Z_0(1) - \varepsilon J_1(\varepsilon\mu)Z_0(\varepsilon)\right)}{(\mu^2 - \xi_n^2)\tilde{N}_n^2}, \\ E_{2n}^0 = \frac{2\mu\left(Y_1(\mu)Z_0(1) - \varepsilon Y_1(\varepsilon\mu)Z_0(\varepsilon)\right)}{(\mu^2 - \xi_n^2)\tilde{N}_n^2}, \\ E_{3n}^0 = \frac{2\mu\left(I_1(\mu)Z_0(1) - \varepsilon I_1(\varepsilon\mu)Z_0(\varepsilon)\right)}{(\mu^2 + \xi_n^2)\tilde{N}_n^2}, \\ E_{4n}^0 = -\frac{2\mu\left(K_1(\mu)Z_0(1) - \varepsilon K_1(\varepsilon\mu)Z_0(\varepsilon)\right)}{(\mu^2 + \xi_n^2)\tilde{N}_n^2}, \end{gathered} \tag{24}$$

Для кругової пластини ($\varepsilon = 0$) отримаємо:

$$w_k^0 = \left\{ J_0\left(\mu \frac{r}{a}\right), I_0\left(\mu \frac{r}{a}\right) \right\}, \tilde{w}_k^0 = \left\{ \frac{2J_1(\mu)}{\mu}, \frac{2I_1(\mu)}{\mu} \right\}, \tag{25}$$

$$E_{1n}^0 = \frac{2\mu J_1(\mu)}{(\mu^2 - \xi_n^2) J_0(\xi_n)}, E_{2n}^0 = \frac{2\mu I_1(\mu)}{(\mu^2 + \xi_n^2) J_0(\xi_n)}, \tag{26}$$

де $\mu^4 = \frac{k_0\omega^2 a^4}{D}$.

Далі розглянемо різні випадки безмасових пластин і мембран ($k_0 = 0$).

У випадку безмасової кільцевої пластини ($\varepsilon \neq 0$, $D \neq 0$, $T \neq 0$, $k_0 = 0$) матимемо:

$$w_k^0 = \left\{ 1, J_0\left(\mu \frac{r}{a}\right), \ln\left(\frac{r}{a}\right), Y_0\left(\mu \frac{r}{a}\right) \right\}, \tag{27}$$

$$\tilde{w}_k^0 = \left\{1,\ \frac{2\left[J_1(\mu) - \varepsilon J_1(\varepsilon\mu)\right]}{\mu\,(1-\varepsilon^2)},\ -\frac{1+\varepsilon^2(2\ln(\varepsilon)-1)}{2(1-\varepsilon^2)},\right.$$
$$\left.\frac{2\left[Y_1(\mu) - \varepsilon Y_1(\varepsilon\mu)\right]}{\mu\,(1-\varepsilon^2)}\right\}, \tag{28}$$

$$E_{1n}^0 = 0,\ E_{2n}^0 = \frac{2\mu\left(J_1(\mu)Z_0(1) - \varepsilon J_1(\varepsilon\mu)Z_0(\varepsilon)\right)}{\left(\mu^2 - \xi_n^2\right)\tilde{N}_n^2},$$
$$E_{4n}^0 = \frac{2\mu\left(Y_1(\mu)Z_0(1) - \varepsilon Y_1(\varepsilon\mu)Z_0(\varepsilon)\right)}{\left(\mu^2 - \xi_n^2\right)\tilde{N}_n^2}, \tag{29}$$

а коефіцієнт E_{3n}^0 не має аналітичного виразу.

Для кругової ($\varepsilon = 0$) безмасової ($k_0 = 0$) пластини отримаємо:

$$w_k^0 = \left\{1,\ J_0\left(\mu\frac{r}{a}\right)\right\},\ \tilde{w}_k^0 = \left\{1,\ \frac{2J_1(\mu)}{\mu}\right\},$$
$$E_{1n}^0 = 0,\ E_{2n}^0 = \frac{2\mu J_1(\mu)}{\left(\mu^2 - \xi_n^2\right)J_0\left(\xi_n\right)}, \tag{30}$$

де $\mu^2 = \frac{Ta^2}{D}$.

У випадку виродження кільцевої безмасової пластини в мембрану ($\varepsilon \neq 0$, $D = 0$, $T \neq 0$, $k_0 = 0$) матимемо:

$$w_k^0 = \left\{1,\ \ln\left(\frac{r}{a}\right)\right\},\ \tilde{w}_k^0 = \left\{1,\ -\frac{1+\varepsilon^2(2\ln(\varepsilon)-1)}{2(1-\varepsilon^2)}\right\},\ E_{1n}^0 = 0, \tag{31}$$

а коефіцієнт E_{2n}^0 не має аналітичного виразу.

Для кругової ($\varepsilon = 0$) безмасової ($k_0 = 0$) мембрани отримаємо:

$$w_k^0 = 1,\ \tilde{w}_k^0 = 1,\ E_{1n}^0 = 0.$$

У випадку відсутності попереднього натягу в кільцевої безмасової пластини ($\varepsilon \neq 0$, $D \neq 0$, $T = 0$, $k_0 = 0$) матимемо:

$$w_k^0 = \left\{1,\ \left(\frac{r}{a}\right)^2,\ \left(\frac{r}{a}\right)\ln\frac{r}{a},\ \left(\frac{r}{a}\right)^2\ln\frac{r}{a}\right\},$$
$$\tilde{w}_k^0 = \left\{1,\ \frac{1}{2}\left(1+\varepsilon^2\right),\ \tilde{w}_3^0,\ \tilde{w}_4^0\right\},\ E_{1n}^0 = 0,\ E_{2n}^0, \tag{32}$$

а коефіцієнти E_{3n}^0 , E_{4n}^0 не мають аналітичних виразів.

Для кругової ($\varepsilon = 0$) безмасової ($k_0 = 0$) пластини отримаємо:

$$w_k^0 = \left\{1,\ \left(\frac{r}{a}\right)^2\right\},\ \tilde{w}_k^0 = \left\{1,\ \frac{1}{2}\right\},\ E_{1n}^0 = 0,\ E_{2n}^0. \tag{33}$$

На основі отриманих виразів (16)–(33) можна проводити аналітичні та чисельні дослідження різних окремих випадків 1–5. Так, наприклад, якщо перша і друга кільцеві пластини абсолютно пружні ($T_1 = T_2 = 0$), то в цьому випадку

$$w_{ik}^0 = \left\{J_0\left(\mu_i\frac{r}{a}\right),\ Y_0\left(\mu_i\frac{r}{a}\right),\ I_0\left(\mu_i\frac{r}{a}\right),\ K_0\left(\mu_i\frac{r}{a}\right)\right\}, \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_{ik}^0 = \left\{ \frac{2\left[J_1(\mu_i) - \varepsilon J_1\left(\varepsilon\mu_i\right)\right]}{\mu_i\left(1-\varepsilon^2\right)}, \frac{2\left[Y_1(\mu_i) - \varepsilon Y_1\left(\varepsilon\mu_i\right)\right]}{\mu_i\left(1-\varepsilon^2\right)}, \right. \\
\left. \frac{2\left[I_1(\mu_i) - \varepsilon I_1\left(\varepsilon\mu_i\right)\right]}{\mu_i\left(1-\varepsilon^2\right)}, -\frac{2\left[K_1(\mu_i) - \varepsilon K_1\left(\varepsilon\mu_i\right)\right]}{\mu_i\left(1-\varepsilon^2\right)} \right\}, \\
E_{i1n}^0 = \frac{2\mu_i\left(J_1\left(\mu_i\right) Z_0(1) - \varepsilon J_1(\varepsilon\mu_i) Z_0(\varepsilon)\right)}{\left(\mu_i^2 - \xi_n^2\right)\tilde{N}_n^2}, \\
E_{i2n}^0 = \frac{2\mu_i\left(Y_1\left(\mu_i\right) Z_0(1) - \varepsilon Y_1(\varepsilon\mu_i) Z_0(\varepsilon)\right)}{\left(\mu_i^2 - \xi_n^2\right)\tilde{N}_n^2}, \\
E_{i3n}^0 = \frac{2\mu_i\left(I_1\left(\mu_i\right) Z_0(1) - \varepsilon I_1(\varepsilon\mu_i) Z_0(\varepsilon)\right)}{\left(\mu_i^2 + \xi_n^2\right)\tilde{N}_n^2}, \\
E_{i4n}^0 = -\frac{2\mu_i\left(K_1\left(\mu_i\right) Z_0(1) - \varepsilon K_1(\varepsilon\mu_i) Z_0(\varepsilon)\right)}{\left(\mu_i^2 + \xi_n^2\right)\tilde{N}_n^2},
\end{aligned} \tag{35}$$

де $\mu_i^4 = \frac{k_{0i}\omega^2 a^4}{D_i}$.

Для кругової пластини ($\varepsilon = 0$) вирази (34) – (35) матимуть вигляд [1]:

$$\begin{gathered}
w_{i1}^0 = J_0\left(\mu_i \frac{r}{a}\right),\ w_{i2}^0 = I_0\left(\mu_i \frac{r}{a}\right),\ \tilde{w}_{i1}^0 = \frac{2J_1\left(\mu_i\right)}{\mu_i},\ \tilde{w}_{i2}^0 = \frac{2I_1\left(\mu_i\right)}{\mu_i}, \\
E_{i1n}^0 = \frac{2\mu_i J_1\left(\mu_i\right)}{\left(\mu_i^2 - \xi_n^2\right) J_0\left(\xi_n\right)},\ E_{i2n}^0 = \frac{2\mu_i I_1\left(\mu_i\right)}{\left(\mu_i^2 + \xi_n^2\right) J_0\left(\xi_n\right)}.
\end{gathered}$$

Висновки

На основі проведених досліджень можна зробити наступні висновки:

1. Частотний спектр складається з трьох наборів частот, що відповідають коливанням пружних основ та коливанням стовпа рідини між ними як одного цілого.
2. В невагомості поздовжні (осесиметричні) коливання будуть неможливі, якщо одна з пластин чи мембран безмасова або абсолютно жорстка.
3. Зі збільшенням глибини заповнення відзначається незначне зростання усіх трьох наборів частот спектра.
4. Зі зменшенням масової характеристики, наприклад, першої пластини, відбувається значне збільшення частот першого набору і незначне – другого та третього наборів.
5. Ряди частотних рівнянь збігаються достатньо швидко. Як правило, достатньо двох-трьох членів в рядах для прийнятної для практики точності. За урахування масових характеристик пластин сильно зростає час розрахунку частотних рівнянь.

Дослідження виконано в рамках програми фундаментальних досліджень Міністерства освіти і науки України (проект № 0116U002522).

Література

[1] Кононов Ю.Н., Русаков В.Ф., Джуха Ю.А. О решении обобщенного неоднородного бигармонического уравнения в задачах гидроупругости // Вісн. Запорізького національного ун-ту. Сер. Фіз.-мат. наук. — 2015. — №. 2 — С. 105–114.

[2] Кононов Ю.Н., Шевченко В.П., Джуха Ю.А. Осесимметричные колебания двухслойной идеальной жидкости со свободной поверхностью в жестком круговом цилиндрическом резервуаре с упругим дном // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки — 2015. — №. 1-2 — С. 116–125.

[3] Кононов Ю.Н., Джуха Ю.А. Осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости в жестком кольцевом цилиндрическом резервуаре // Вісн. Запорізького національного ун-ту. Сер. Фіз.-мат. наук. — 2016. — №. 1 — С. 103–115.

[4] Кононов Ю.М., Джуха Ю.О. Осесиметричні коливання пружних основ і двошарової ідеальної рідини в жорсткому кільцевому циліндричному резервуарі [Електронний ресурс] // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання - 2016 25-27 травня 2016, Львів, Україна / Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. — Львів, 2016. — Режим доступу: http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Kononov.pdf. — Дата звернення: 6.11.2016. — Осесиметричні коливання пружних основ і двошарової ідеальної рідини в жорсткому кільцевому циліндричному резервуарі.

[5] Kononov Yu.M., Shevchenko V.P., Dzhukha Yu.O. Coupled axisymmetric vibrations of annular elastic bases and ideal liquid in a rigid coaxial cylindrical container // Book of Abstracts 5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky, 9-11 Nov. 2016, Kyiv, Ukraine. — Vinnytsia, 2016. — P. 81–83.

[6] *Докучаев Л.В.* Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. — М.: Машиностроение, 1987. — 232 с.

[7] Кононов Ю.Н., Дидок Н.К., Джуха Ю.А. О решении обобщенного неоднородного бигармонического уравнения в задачах гидроупругости // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А. — 2014. — Вип. 1 — С. 64–69.

[8] Андронов А.В. О малых колебаниях идеальной жидкости в сосуде с упругими днищами // Симфер. ун-т. — Симферополь, 1983. — 26 с. — Рус. — Деп. в УкрНИИНТИ 30.12.83, № 1478.

[9] *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

[10] Гончаров Д.А. Осесимметричные колебания двухплотностной жидкости в цилиндрическом баке // Электронное научно-техническое издание: Наука и образование. — 2012. — №. 4 [Электронный ресурс] URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/362856.html (дата обращения: 19.02.2014).

[11] Гончаров Д.А. Динамика двухслойной жидкости, разделенной упругой перегородкой с учетом сил поверхностного натяжения // Электронное научно-техническое издание: Наука и образование. — 2013. — №. 11. DOI:10.7463/1113.0619258 [Электронный ресурс] URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/619258.html (дата обращения: 19.02.2014).

[12] Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения // Инженерный журнал: наука и инновации. — 2013. — Вып. 12. [Электронный ресурс] URL: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html (дата обращения: 19.02.2014).

[13] Bauer H. F., Chiba M. Axisymetric oscillation of a viscous liquid covered by an elastic structure // Journal of Sound and Vibrations. — 2005. — 281. — P. 835–847.

[14] Ding Z. Free bending vibration of annular cylindrical tank partially filled with liquid in consideration of surface wave // Applied Mathematics and Mechanics. — 1994. — 15, No. 9, P. 831–839.

[15] Jang J.-W., Alaniz A., Yang L., Powers J., and Hall C. Mechanical slosh models for rocket-propelled spacecraft // Navigation and control conference, 19-22 Aug. 2013, Boston, MA, USA / American Inst. of Aeronautics and Astronautics. — Reston, VA, USA, 2013. — Mode of access: http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20140002967.pdf. — Viewed on September 7, 2016. — Mechanical slosh models for rocket-propelled spacecraft.

[16] Jhung M. J., Kim W. T., and Ryu Y. H. Dynamic characteristics of cylindrical shells considering fluid-structure interaction // Nuclear Engineering and Technology. — 2009. — 41, No. 10, P. 1333–1346.

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯХ В НЕВЕСОМОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ, НАХОДЯЩИЕСЯ В ЖЕСТКОМ КОЛЬЦЕВОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗЕРВУАРЕ С УПРУГИМИ ОСНОВАНИЯМИ

Кононов Ю.Н., Шевченко В.П., Джуха Ю.О.

РЕЗЮМЕ

Выписано и проанализировано частотное уравнение собственных продольных (осесимметричных) колебаний идеальной несжимаемой жидкости в невесомости, находящийся в жестком кольцевом цилиндрическом резервуаре с упругими основаниями в виде тонких кольцевых пластин. Вычисленны неизвестные коэффициенты частотного уравнения для различных предельных случаев вырождения кольцевых пластин в круговые, в мембраны, в абсолютно жесткие пластины. Оценено влияние невесомости и механических параметров на частотный спектр.

Ключевые слова: гидро-упругость, кольцевые пластины, идеальная несжимаемая жидкость, осесимметричные колебания, упругие изотропные пластины.

LONGITUDINAL OSCILLATIONS IN THE INNESSITY OF THE IDEAL LIQUID, IN THE HARD RING CYLINDRICAL TANK WITH ELSE BASIS

Kononov Yu., Shevchenko V., Juha Yu.

SUMMARY

Frequency equation of proper longitudinal (axisymmetric) oscillations of ideal incompressible liquid in weightlessness, which is located in a rigid ring cylindrical reservoir with elastic bases in the form of thin circular plates, is written out and analyzed. Unknown coefficients of the frequency equation for the various limiting cases of degeneration of ring plates in circular, in membranes, in absolutely rigid plates are calculated. The influence of weightlessness and mechanical parameters on the frequency spectrum is estimated.

Key words: hydro-elasticity, ring plates, ideal incompressible fluid, oscillometric oscillations, elastic isotropic plates.