УДК 531.36

Пузырев В.Е., Савченко Н.В., Камынина Е.В.

[1] **доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики и методики преподавания математики Донецкого национального университета**

[2] **ассистент кафедры высшей математики и системного анализа, Национального Авиационного Университета имени М.Е. Жуковского**

[3] **аспирант кафедры высшей математики и методики преподавания математики Донецкого национального университета**

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ МАЯТНИКА ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

Рассмотрена задача построения функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости по части переменных. В качестве примера расмотрен маятник переменной длины с присоединенным к нему динамическим абсорбером. Показано, что в данном случае имеет место равномерная асимптотическая устойчивость по части переменных.

Ключевые слова: *устойчивость по части переменных, функция Ляпунова, маятник переменной длины.*

Введение

Задачи устойчивости и стабилизации динамических систем не по всем, а лишь по отношению к некоторой части переменных естественным образом возникают в приложениях, как из требования нормального функционирования, так и при оценке возможностей системы. Благодаря большой математической общности постановки указанные задачи являются междисциплинарными и естественным образом возникают при моделировании многих явлений и управляемых процессов в самых разных разделах науки: механике, физике, экономике, биологии, и других.

Впервые задачу об устойчивости по части переменных поставил А. М. Ляпунов, поскольку такая задача является более общей, и позволяет рассматривать устойчивость более сложных систем. Однако, сам Ляпунов ее не рассматривал. Первые общие теоремы сформулировал И. Г. Малкин в 1937 году.

Обеспечить устойчивость по части переменных проще, чем по всем переменным, и поэтому в теории автоматического управления даже выделилось отдельное научное направление, посвященное исследованию и обеспечению устойчивости по части переменных. Среди многочисленных публикаций по этому направлению отметим книги В.И. Зубова [1], Н.Н. Красовского [2], В.И. Воротникова [3], А.Я. Савченко и А.О. Игнатьева [4].

В данном вопросе больших результатов добился В. В. Румянцев [5, 6]. Он доказал основные общие теоремы, а результаты были применены для изучения устойчивости космических аппаратов, проведено систематическое исследование вопроса.

Ведущим методом исследования подобных задач является метод функций Ляпунова, оказавшийся весьма эффективным при анализе как теоретических, так и прикладных проблем. Однако, хотя во многих важных прикладных задачах метод функций Ляпунова и позволяет получить строгие условия устойчивости по части переменных, тем не менее, в целом вопросы конструктивного построения функций Ляпунова остаются малоизученными. В такой ситуации значительный интерес представляет как дальнейшее развитие метода в плане ослабления требований к функциям Ляпунова и указания конструктивных путей их построения, так и развитие других подходов к задачам устойчивости по отношению к части переменных.

Теоретическая часть

Рассмотрим механическую систему, уравнения движения которой описываются следующей системой ОДУ

$$\dot{\boldsymbol{x}} = X(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \dot{\boldsymbol{y}} = Y(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \tag{1}$$

где X, Y – непрерывные функции такие, что $X : \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$, $Y : \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$, где $\boldsymbol{I} = [0; +\infty)$, а $\boldsymbol{\Omega}$ – область в $\boldsymbol{R}^n$, содержащая начало координат. Предполагается, что $X(t, 0, 0) \equiv 0, Y(t, 0, 0) \equiv 0$ для всех $t \in \boldsymbol{I}$ и, кроме того, функции $X(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), Y(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ непрерывны в области $\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R}^m$, удовлетворяют условиям, обеспечивающим единственность решения системы ДУ (1).

Приведем некоторые определения [4] и теорему [5], необходимые для дальнейшего.

Означення 1. *Функция $V(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}$ допускает бесконечно малый высший предел относительно $\boldsymbol{x}$, если для некоторой функции $b \in \boldsymbol{K}$ выполняется неравенство $|V(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqslant b(||\boldsymbol{x}||)$. Здесь $\boldsymbol{K}$ – класс функций Хана, $||\cdot||$ – евклидова норма: $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}, ||\boldsymbol{y}|| = \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_m^2}$.*

Означення 2. *Решение $\boldsymbol{z} = 0$ системы (1) равномерно устойчиво по отношению к $\boldsymbol{x}$, если для заданного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon)$, такое, что $||\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{z}_0)|| < \varepsilon$ для любых $t_0, \boldsymbol{z}_0, t$, удовлетворяющих условиям $t_0 \in \boldsymbol{I}, ||\boldsymbol{z}_0|| < \delta$ и $t \geqslant t_0$.*

Означення 3. *Решение $\boldsymbol{z} = 0$ системы (1) равномерно асимптотически устойчиво по отношению к $\boldsymbol{x}$ (равномерно $\boldsymbol{x}$-устойчиво) и область $\boldsymbol{G}_\delta \subset \boldsymbol{R}^{n+m}$ лежит в области x-притяжения, если оно равномерно устойчиво по отношению к $\boldsymbol{x}$, и выполняются условия*

$$\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{z}_0) \in \boldsymbol{\Gamma}, t \geqslant t_0, \lim_{t \to \infty} ||\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{z}_0)|| = 0, \tag{2}$$

причем соотношение (2) выполняется равномерно по $t_0, \boldsymbol{z}_0$ из области $t_0 \in \boldsymbol{I}, \boldsymbol{z}_0 \in \boldsymbol{G}_\delta$, т.е. для любого $\eta > 0$ найдется $T(\eta) > 0$, такое, что из $t_0 \in \boldsymbol{I}, \boldsymbol{z}_0 \in \boldsymbol{G}_\delta$ следует $||\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{z}_0)|| < \eta$ для всех $t \geqslant t_0 + T$. Здесь $\boldsymbol{\Gamma}$ – некоторая определенная наперед заданная область, лежащая в области $\boldsymbol{\Omega}$.

Теорема 1. *Если для ДУ возмущенного движения (1) в области $\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\Gamma} \times \boldsymbol{R}^m$ можно подобрать определенно-положительную относительно $\boldsymbol{x}$ функцию $V(t, \boldsymbol{z})$, допускающую бесконечно малый высший предел относительно $\boldsymbol{x}$ и имеющую определенно-отрицательную относительно $\boldsymbol{x}$ производную dV/dt, то существует область $\boldsymbol{\Omega}_\delta, (0 \in \boldsymbol{\Omega}_\delta \in \boldsymbol{\Gamma})$, такая, что невозмущенное движение $\boldsymbol{x} = 0, \boldsymbol{y} = 0$ равномерно асимптотически устойчиво относительно $\boldsymbol{x}$ и область $\boldsymbol{\Omega}_\delta \times \boldsymbol{R}^m$ лежит в области $\boldsymbol{x}$-притяжения.*

Построение функции Ляпунова для устойчивой компоненты

Для демонстрации вычислительной процедуры опишем случай $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4$.

Рассмотрим механическую систему, уравнения движения которой описываются системой ОДУ второго порядка

$$\boldsymbol{A}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = 0, \tag{3),}$$

где $\boldsymbol{x} \in R^2$, матрицы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$ – симметрические и знакоопределенные, $\det \boldsymbol{B} \geqslant 0$.

Домножим слева уравнение (3) на обратную матрицу к A. Тогда уравнение (3) перепишется следующим образом

$$\ddot{\boldsymbol{x}} + \widetilde{\boldsymbol{B}}\dot{\boldsymbol{x}} + \widetilde{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{x} = 0, \tag{4),}$$

где $\widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$, $\widetilde{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ – положительно определенные недиагональные (в общем случае) матрицы, которые имеют вид

$$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{12} & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\boldsymbol{C}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение системы (4) имеет вид

$$\lambda^4 + b_{11}\lambda^3 + (c_{11} + c_{22})\lambda^2 + (b_{11}c_{22} - b_{21}c_{12})\lambda + c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = 0. \tag{5}$$

Случай различных корней

Будем предпологать, что уравнение (5), имеет четыре комплексных корня $\lambda_1 = \sigma_1 + i\omega_1$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, $\lambda_3 = \sigma_2 + i\omega_2$, $\lambda_4 = \overline{\lambda_3}, \sigma_{1,2} < 0$. Черта сверху обозначает комплексное сопряжение. Рассмотрим задачу устойчивости решения системы (4).

Приведем систему второго порядка, которая описывается ДУ (4), к каноническому виду. Для этого введем замену

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{S}_2\dot{\boldsymbol{x}}, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2$ – искомые матрицы преобразования. Тогда система (2) перепишется в виде

$$\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} = 0, \tag{7}$$

где

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2\sigma_1 & 0 \\ 0 & 2\sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 + \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 + \omega_2^2 \end{pmatrix}.$$

Найдем выражения для элементов матриц $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2$.

$$\boldsymbol{S}_1 = \begin{pmatrix} s_{11}^1 & s_{12}^1 \\ s_{21}^1 & s_{22}^1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{S}_2 = \begin{pmatrix} s_{11}^2 & s_{12}^2 \\ s_{21}^2 & s_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

Для этого подставим замену (6) в (7). Учитывая, что

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{S}_1\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{S}_2\ddot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{S}_1\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{x}^{(3)}, \boldsymbol{x}^{(3)} = -\boldsymbol{B}\ddot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}},$$

получим

$$(\boldsymbol{S}_1 - \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{B} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{S}_2)\ddot{\boldsymbol{x}} + (\boldsymbol{P}\boldsymbol{S}_1 - \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{C} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}_2)\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{x} = 0. \tag{8}$$

Приравняем матрицы коэффициентов из (4) и (8), предварительно домножив (4) слева на $\boldsymbol{S}_1 - \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{B} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{S}_2$. Учитывая связь между корнями характеристического уравнения и коэффициентами самой системы, получаем следующие выражения для элементов матриц преобразования

$$s_{12}^1 = \frac{s_{11}^1 c_{12}}{c_{11}}, s_{21}^1 = -\frac{s_{21}^2(\omega_1^2 + \sigma_1^2 - c_{11})}{2\sigma_2}, s_{22}^1 = \frac{s_{21}^2 c_{12}}{2\sigma_2},$$

$$s_{11}^2 = \frac{s_{11}^1(\omega_2^2 + 4\sigma_1^2 + 4\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 - c_{11})}{2c_{11}\sigma_1}, s_{12}^2 = -\frac{s_{11}^1 c_{12}}{2c_{11}\sigma_1}, s_{22}^2 = 0,$$

где s_{11}^1, s_{21}^2 – ненулевые постоянные.

Поскольку для (7) имеют место нормальные координаты, то система распадается на два независимых ДУ второго порядка. Выполним переход к комплексным переменным путем ввода замены $\boldsymbol{y} = \widetilde{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{z}$, где $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ – матрица перехода. Перепишем (7) в виде системы ДУ первого порядка

$$\dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = -(\sigma_1^2 + \omega_1^2)y_1 - 2\sigma_1 y_2, \dot{y}_3 = y_4, \dot{y}_4 = -(\sigma_2^2 + \omega_2^2)y_3 - 2\sigma_2 y_4. \tag{9}$$

Не трудно видеть, что для первой и последней пар уравнений матрицы перехода к комплексным переменным примут следующий вид

$$\widetilde{\boldsymbol{S}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \overline{\lambda_1} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\boldsymbol{S}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_2 & \overline{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

соответственно.

Для комплексных переменных общеизвестный факт заключается в том, что функцию Ляпунова для системы можно брать в виде $V = \sum_j \boldsymbol{\alpha}_j \boldsymbol{z}_j \overline{\boldsymbol{z}}_j$, где $\boldsymbol{\alpha}_j$ – произвольные ненулевые множители [4]. Функция, взятая таким образом, будет знакоопределенной, а ее производная в силу линейной части системы уравнений движения будет иметь противоположный знак. В нашем случае

$$V = \alpha_1 z_1 \overline{z}_1 + \alpha_2 z_2 \overline{z}_2. \tag{10}$$

Положим $\alpha_1 = -(\lambda_1 - \overline{\lambda_1})^2, \alpha_2 = -(\lambda_2 - \overline{\lambda_2})^2$.

Вернемся к вещественным переменным $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$, где верхний индекс T обозначает транспонирование. Для этого выполним обратную замену $\boldsymbol{z} = \widetilde{\boldsymbol{S}}^{-1}\boldsymbol{y}$, где $\widetilde{\boldsymbol{S}} = \mathtt{diag}(\widetilde{\boldsymbol{S}}_1, \widetilde{\boldsymbol{S}}_2), \boldsymbol{z} = (z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2)^T$. Функция Ляпунова и ее производная в силу линейной части системы (9) примут вид

$$V = V_1 + V_2,$$

где $V_1 = (\omega_1^2 + \sigma_1^2)y_1^2 - 2\sigma_1 y_1 y_2 + y_2^2, V_2 = (\omega_2^2 + \sigma_2^2)y_3^2 - 2\sigma_2 y_3 y_4 + y_4^2$,

$$\dot{V} = 2\sigma_1 V_1 + 2\sigma_2 V_2$$

соответственно.

Для квадратичной формы V_1 запишем критерий Сильвестра. Матрица квадратичной формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} \omega_1^2 + \sigma_1^2 & \sigma_1^2 \\ \sigma_1^2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1 = \omega_1^2 + \sigma_1^2 > 0, \Delta_2 = \omega_1^2 > 0.$$

Аналогично имеем для V_2. Следовательно, V является знакоположительной квадратичной формой, а $\dot{V}$ – знакоотрицательная квадратичная форма переменных y_1, y_2, y_3, y_4.

Не трудно видеть, что все условия теоремы выполнены. Следовательно, решение исходной системы равномерно асимптотически устойчиво по части переменных.

Случай кратных корней

Будем предполагать, что уравнение (5) имеет кратные корни

$$\lambda_{1,2} = \sigma + i\omega = \lambda, \lambda_{3,4} = \overline{\lambda}_{1,2} = \overline{\lambda}, \sigma < 0.$$

Перепишем систему (4) в виде системы ДУ первого порядка $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c_{11} & -c_{12} & -b_{11} & 0 \\ -c_{12} & -c_{22} & -b_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Выполним переход к комплексным переменным по правилу $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{z}$, где $\boldsymbol{S}$ – матрица перехода, которая состоит из двух собственных векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ матрицы $\boldsymbol{A}$ и двух корневых векторов $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$, а $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \overline{z_1}, \overline{z_2})^T$.

Решая систему $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{a}_1 = 0$, где $\boldsymbol{E}$ – единичная матрица, имеем

$$\boldsymbol{a}_1 = \left(p_1, -\frac{p_1(b_{21}\lambda + c_{12})}{\lambda^2 + c_{22}}, p_1\lambda, -\frac{p_1\lambda(b_{21}\lambda + c_{12})}{\lambda^2 + c_{22}}\right)^T,$$

где p_1 – произвольная ненулевая постоянная. Собственный вектор $\boldsymbol{a}_2$ получается из вектора $\boldsymbol{a}_1$ путем комплексного сопряжения.

Для нахождения корневого вектора $\boldsymbol{b}_1$ решим систему $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$. Отсюда имеем

$$\boldsymbol{b}_1 = \left(-\frac{(b_{11} + 2\lambda)p_1 + q_2 c_{12}}{b_{11}\lambda + \lambda^2 + c_{11}}, q_2, -\frac{[(b_{11} + 2\lambda)p_1 + q_2 c_{12}]\lambda}{b_{11}\lambda + \lambda^2 + c_{11}} + p_1, \lambda q_2 - \frac{(b_{21}\lambda + c_{12})p_1}{\lambda^2 + c_{22}}\right)^T,$$

где q_2 – произвольная постоянная. Корневой вектор $\boldsymbol{b}_2$ получается из вектора $\boldsymbol{b}_1$ путем комплексного сопряжения.

Таким образом матрица перехода примет вид

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} p_1 & -\frac{(b_{11}+2\lambda)p_1+q_2c_{12}}{b_{11}\lambda+\lambda^2+c_{11}} & p_1 & -\frac{(b_{11}+2\overline{\lambda})p_1+q_2c_{12}}{b_{11}\overline{\lambda}+\overline{\lambda}^2+c_{11}} \\ -\frac{p_1(b_{21}\lambda+c_{12})}{\lambda^2+c_{22}} & q_2 & -\frac{p_1(b_{21}\overline{\lambda}+c_{12})}{\overline{\lambda}^2+c_{22}} & q_2 \\ p_1\lambda & -\frac{[(b_{11}+2\lambda)p_1+q_2c_{12}]\lambda}{b_{11}\lambda+\lambda^2+c_{11}} + p_1 & p_1\overline{\lambda} & -\frac{[(b_{11}+2\overline{\lambda})p_1+q_2c_{12}]\overline{\lambda}}{b_{11}\overline{\lambda}+\overline{\lambda}^2+c_{11}} + p_1 \\ -\frac{p_1\lambda(b_{21}\lambda+c_{12})}{\lambda^2+c_{22}} & \lambda q_2 - \frac{(b_{21}\lambda+c_{12})p_1}{\lambda^2+c_{22}} & -\frac{p_1\overline{\lambda}(b_{21}\overline{\lambda}+c_{12})}{\overline{\lambda}^2+c_{22}} & \overline{\lambda}q_2 - \frac{(b_{21}\overline{\lambda}+c_{12})p_1}{\overline{\lambda}^2+c_{22}} \end{pmatrix}.$$

В комплексных переменных система (4) перепишется следующим образом

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{z}, \tag{11}$$

где

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Для нее функция Ляпунова примет вид

$$V = \alpha_1 z_1\overline{z_1} + \alpha_2 z_2\overline{z_2} + \beta(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2). \tag{12}$$

А производная функции Ляпунова в силу линейной части системы (11)

$$\dot{V} = \alpha_1(\lambda + \overline{\lambda})z_1\overline{z_1} + [\beta(\lambda + \overline{\lambda}) + \alpha_1](z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) + (\alpha_2(\lambda + \overline{\lambda}) + 2\beta)z_2\overline{z_2}.$$

Для того, чтобы применить критерий Сильвестра для данных квадратичных форм, перейдем к вещественным переменным по правилу $\boldsymbol{z} = \hat{\boldsymbol{x}} + i\hat{\boldsymbol{y}}$, $\overline{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{x}} - i\hat{\boldsymbol{y}}$, где $\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)^T$, $\hat{\boldsymbol{y}} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2)^T$. Имеем

$$V = \alpha_1(\hat{x}_1^2 + \hat{y}_1^2) + \alpha_2(\hat{x}_2^2 + \hat{y}_2^2) + 2\beta(\hat{x}_1\hat{x}_2 + \hat{y}_1\hat{y}_2),$$

$$\dot{V} = \alpha_1(\lambda + \overline{\lambda})(\hat{x}_1^2 + \hat{y}_1^2) + 2[\beta(\lambda + \overline{\lambda}) + \alpha_1](\hat{x}_1\hat{x}_2 + \hat{y}_1\hat{y}_2) + [\alpha_2(\lambda + \overline{\lambda}) + 2\beta](\hat{x}_2^2 + \hat{y}_2^2).$$

Условия критерия Сильвестра для функции Ляпунова запишутся следующим образом $\Delta_1 = \alpha_1$, $\Delta_2 = \alpha_1\alpha_2 - \beta^2$, $\Delta_3 = \alpha_1(\alpha_1\alpha_2 - \beta^2)$, $\Delta_4 = (\alpha_1\alpha_2 - \beta^2)^2$. Для того, чтобы V была положительноопределенной квадратичной формой положим $\alpha_{1,2} > 0$ и $\beta < \sqrt{\alpha_1\alpha_2}$.

Для $\dot V$ имеем

$$\Delta_1 = \alpha_1(\lambda + \overline{\lambda}) < 0, \Delta_2 = \alpha_1^2(\lambda + \overline{\lambda})^2 > 0,$$

$$\Delta_3 = \alpha_1(\lambda + \overline{\lambda})[(\alpha_1\alpha_2 - \beta^2)(\lambda + \overline{\lambda})^2 - \alpha_1^2] < 0,$$

$$\Delta_4 = [(\alpha_1\alpha_2 - \beta^2)(\lambda + \overline{\lambda})^2 - \alpha_1^2]^2 > 0.$$

Таким образом, V является знакоположительной квадратичной формой, а $\dot V$ – знакоотрицательная квадратичная форма своих переменных.

Не трудно видеть, что все условия теоремы выполнены. Следовательно, решение исходной системы равномерно асимптотически устойчиво по части переменных.

Пример. Маятник переменной длины.

В качестве примера рассмотрим следующую механическую систему. Основная система представляет собой маятник переменной длины (см. Рис.1). К маятнику присоединен динамический абсорбер (ДА).

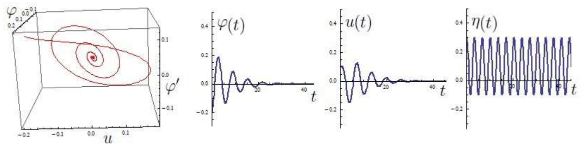

Рис. 1: Маятник с ДА.

Жесткости пружин маятника и абсорбера равны соответственно $\widetilde{k}$ и $\widetilde{k_a}$, l – растояние от точки подвеса до центра масс маятника, коэффициент вязкого трения обозначим через $\widetilde{h_a}$. В качестве обобщенных координат возьмем угол φ между осью маятника и направлением силы тяжести и величины $\widetilde{\eta}$ и $\widetilde{u}$. Свяжем с точкой O прямоугольную декартову систему координат, ось ординат которой направлена в сторону, противоположную вектору силы тяжести. Имеем

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} \widetilde{\eta}\sin\varphi \\ -\widetilde{\eta}\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} l\sin\varphi \\ -l\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_3 = \begin{pmatrix} \widetilde{d}\sin\varphi + \widetilde{u}\cos\varphi \\ -\widetilde{d}\cos\varphi + \widetilde{u}\sin\varphi \end{pmatrix},$$

а векторы скоростей

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} \dot{\widetilde{\eta}}\sin\varphi + \widetilde{\eta}\dot\varphi\cos\varphi \\ -\dot{\widetilde{\eta}}\cos\varphi + \widetilde{\eta}\dot\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} l\dot\varphi\cos\varphi \\ l\dot\varphi\sin\varphi \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} \widetilde{d}\dot\varphi\cos\varphi + \dot{\widetilde{u}}\cos\varphi - \widetilde{u}\dot\varphi\sin\varphi \\ \widetilde{d}\dot\varphi\sin\varphi + \dot{\widetilde{u}}\sin\varphi + \widetilde{u}\dot\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Для кинетической и потенциальной энергий рассматриваемой механической системы имеем, соответственно

$$K = \frac{1}{2}(Ml^2 + \widetilde{m}\widetilde{\eta}^2 + \widetilde{m_a}\widetilde{d}^2 + \widetilde{m_a}\widetilde{u}^2 + \widetilde{J})\dot\varphi^2 + \widetilde{m_a}\widetilde{d}\dot{\widetilde{u}}\dot\varphi + \frac{1}{2}\widetilde{m}\dot{\widetilde{\eta}}^2 + \frac{1}{2}\widetilde{m_a}\dot{\widetilde{u}}^2,$$

$$\Pi = -(Ml + \widetilde{m}\widetilde{\eta})g\cos\varphi - \widetilde{m_a}g(\widetilde{d}\cos\varphi - \widetilde{u}\sin\varphi) + \frac{1}{2}\widetilde{k_a}\widetilde{u}^2 + \frac{1}{2}\widetilde{k}(\widetilde{\eta} - \widetilde{\eta_0})^2.$$

Здесь g – ускорение силы тяжести, значение $\widetilde{\eta_0}$ соответствует длине пружины в недеформированном состоянии, $\widetilde{J}$ – момент инерции маятника. Функция Релея имеет вид $R = -\widetilde{h_a}\dot{\widetilde{u}}^2$.

Введем безразмерные параметры и время по формулам

$$\eta = \frac{\widetilde{\eta}}{l}, u = \frac{\widetilde{u}}{l}, d = \frac{\widetilde{d}}{l}, \mu_1 = \frac{\widetilde{m_a}}{M}, \mu_2 = \frac{\widetilde{m}}{M}, k_a = \frac{\widetilde{k_a}l}{Mg}, k = \frac{\widetilde{k}l}{Mg},$$

$$h_a = \frac{\widetilde{h_a}}{l\sqrt{gl}}, J = \frac{\widetilde{J}}{Ml^2}, \tau = \sqrt{\frac{g}{l}}t. \qquad (13)$$

С учетом замены (13), запишем уравнения движения рассматриваемой системы в форме Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j, j = \overline{1,3},$$

где L – функция Лагранжа, $L = K - \Pi$.

$$2L = (\mu_1 d^2 + \eta^2\mu_2 + \mu_1 u^2 + J + 1)\varphi'^2 + \mu_2\eta'^2 + \mu_1 u'^2 + 2\mu_1 d u'\varphi' + 2(\mu_1 d + \eta\mu_2 + 1)\cos\varphi -$$

$$-2\mu_1 u\sin\varphi - k_a u^2 - k(\eta - \eta_0)^2.$$

Найдем положения равновесия. Приравнивая нулю градиент потенциальной энергии, получаем систему уравнений

$$(\mu_1 d + \eta\mu_2 + 1)\sin\varphi + \mu_1 u\cos\varphi = 0, -\mu_2\cos\varphi + k(\eta - \eta_0) = 0,$$
$$\mu_1\sin\varphi + k_a u = 0. \qquad (14)$$

Поскольку $\eta > 0, u > 0$, то из первого равенства (14) получаем $\varphi = 0, \varphi = \pi$. Тогда нижнему положению равновесия соответствует значение

$$\eta^{(0)} = \frac{k\eta_0 + \mu_2}{k}.$$

Изучим вопрос об устойчивости нижнего положения равновесия данной механической системы, т.е. решения

$$\varphi = 0, \eta = \eta^{(0)}, u = 0, \dot{\varphi} = 0, \dot{\eta} = 0, \dot{u} = 0. \qquad (15)$$

Переходя к возмущениям $\varphi = \varphi^*, \eta = \eta^{(0)} + \eta^*, u = u^*$, запишем уравнения возмущенного движения (верхний индекс “*” в целях удобства ниже опускаем).

$$(\mu_1 d^2 + \eta^2\mu_2 + J + 1)\varphi'' + \mu_1 d u'' + (\mu_1 d + 1)\varphi + \mu_1 u + \mu_2\varphi\eta + ... = 0,$$

$$\mu_2\eta'' + k\eta + \frac{1}{2}\mu_2\varphi^2 + ... = 0, \qquad (16)$$

$$\mu_1 d\varphi'' + \mu_1 u'' + h_a u' + k_a u + \mu_1\varphi + ... = 0.$$

Здесь многоточием обозначены совокупности слагаемых, имеющих порядок малости выше второго относительно возмущений и их производных, штрихом обозначено дифференцирование по времени τ.

Система уравнений первого приближения (16) распадается на две подсистемы. Из второго уравнения имеем два чисто мнимых корня $\pm i\sqrt{\frac{k}{\mu_2}}$, а для первого и третьего постороим характеристическое уравнение и проверим выполнение критерия Рауса-Гурвица.

Введем следующие обозначения

$$a = \frac{\mu_1}{\eta_0^2\mu_2 + J + 1}, k = \frac{k_a}{a(\eta_0^2\mu_2 + J + 1)}, h = \frac{h_a}{a(\eta_0^2\mu_2 + J + 1)}, \widetilde{J} = \frac{J}{\eta_0^2\mu_2 + J + 1}.$$

В дальнейшем волну сверху будем опускать. Запишем первое и третье уравнения системы (16), отбросив слагаемые порядка малости выше первого относительно возмущений обобщенных координат и их производных.

$$u'' + h(ad^2 + 1)u' + (Jd - d + 1)\varphi + (ad^2k - ad + k)u = 0,$$
$$\varphi'' - ahdu' - (J - 1)\varphi - a(kd - 1)u = 0. \qquad (17)$$

Характеристическое уравнение для системы (17) имеет вид

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0,$$

где

$$a_0 = 1, a_1 = (ad^2 + 1)h, a_2 = ad^2k - ad - J + k + 1,$$
$$a_3 = (ad - J + 1)h, a_4 = (ad - J + 1)k - a.$$

Все его коэффициенты положительны, равно как и определитель Гурвица

$$a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_4a_1^2 = ah^2[(J - 1)d + 1]^2 > 0.$$

Поэтому, согласно критерию Льенара–Шипара [7], все четыре корня имеют отрицательные вещественные части. Таким образом, по переменной η – критический (по Ляпунову) случай пары чисто мнимых корней. Покажем, что для системы (16) имеет место асимптотическая устойчивость по переменным φ, φ', u и u'.

Согласно вышеизложенному теоретическому материалу, матрицы $\widetilde{\boldsymbol{B}}$, $\widetilde{\boldsymbol{C}}$ для системы (17) примут вид

$$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} h(ad^2+1) & 0 \\ -ahd & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\boldsymbol{C}} = \begin{pmatrix} k(ad^2+1)-ad & (J-1)d+1 \\ a(1-kd) & 1-J \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + h(ad^2+1)\lambda^3 + [k(ad^2+1) - ad + 1 - J]\lambda^2 + [h(ad^2+1)(1-J) + ahd([J-1]d+1)]\lambda +$$

$$+[k(ad^2+1) - ad](1-J) - [(J-1)d+1]^2 = 0.$$

Рассмотрим случай различных корней. Построим функцию Ляпунова согласно формуле (10). Тогда в исходных переменных функция Ляпунова примет вид

$$V = (\omega_1^2 + \sigma_1^2)(s_{12}^2\varphi' + s_{11}^2 u' + s_{12}^1\varphi + s_{11}^1 u)^2 -$$

$$-2\sigma_1(s_{12}^2\varphi' + s_{11}^2 u' + s_{12}^1\varphi + s_{11}^1 u)(s_{22}^2\varphi' + s_{21}^2 u' + s_{22}^1\varphi + s_{21}^1 u) +$$

$$+(s_{22}^2\varphi' + s_{21}^2 u' + s_{22}^1\varphi + s_{21}^1 u)^2 + (\omega_2^2 + \sigma_2^2)[(-b_{11}s_{11}^2 - b_{21}s_{12}^2 + s_{11}^1)u' + s_{12}^1\varphi' -$$

$$-(c_{11}s_{11}^2 + c_{12}s_{12}^2)u - (c_{12}s_{11}^2 + c_{22}s_{12}^2)\varphi]^2 - 2\sigma_2[(-b_{11}s_{11}^2 - b_{21}s_{12}^2 + s_{11}^1)u' + s_{12}^1\varphi' -$$

$$-(c_{11}s_{11}^2 + c_{12}s_{12}^2)u - (c_{12}s_{11}^2 + c_{22}s_{12}^2)\varphi][(-b_{11}s_{21}^2 - b_{21}s_{22}^2 + s_{21}^1)u' + s_{22}^1\varphi' -$$

$$-(c_{11}s_{21}^2 + c_{12}s_{22}^2)u - (c_{12}s_{21}^2 + c_{22}s_{22}^2)\varphi] + [(-b_{11}s_{21}^2 - b_{21}s_{22}^2 + s_{21}^1)u' + s_{22}^1\varphi' -$$

$$-(c_{11}s_{21}^2 + c_{12}s_{22}^2)u - (c_{12}s_{21}^2 + c_{22}s_{22}^2)\varphi]^2.$$

В силу громоздкости дальнейших выкладок, перейдем к численному примеру. Положим $h = 0.4$, $a = 0.2$, $d = 0.2$, $k = 2.39$, $J = 0.3$ Тогда $\sigma_1 = -0.0336$, $\sigma_2 = -0.1679$, $\omega_1 = 0.5816$, $\omega_2 = 1.6367$.

Пусть $s_{11}^1 = 1, s_{21}^2 = 2$. Матрицы перехода $\boldsymbol{S}_1$ и $\boldsymbol{S}_2$ примут вид

$$\boldsymbol{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.3630 \\ -12.0824 & -5.1193 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{S}_2 = \begin{pmatrix} -2.2928 & 5.4003 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Функция Ляпунова запишется в виде

$$V = 168.3876u^2 + 134.3264u\varphi + 47.4084u\varphi' + 76.2142uu' + 38.9844\varphi^2 +$$

$$+16.4292\varphi\varphi' + 11.1129\varphi u' + 173.8353u'^2 + 123.2068\varphi' u' + 35.8379\varphi'^2.$$

Матрица данной квадратичной формы

$$\begin{pmatrix} 168.3876 & 67.1632 & 38.1071 & 23.7042 \\ 67.1632 & 38.9844 & 5.5565 & 8.2146 \\ 38.1071 & 5.5565 & 173.8353 & 61.6034 \\ 23.7042 & 8.2146 & 61.6034 & 35.8379 \end{pmatrix}.$$

Для нее имеем $\Delta_1 = 168.3876, \Delta_2 = 2053.5932, \Delta_3 = 3.23 \cdot 10^5, \Delta_4 = 4.2 \cdot 10^6$. Очевидно, что согласно критерию Сильвестра, V является положительно определенной квадратичной формой.

Производная функции Ляпунова $\dot{V}$ в силу уравнений движения:

$$\dot{V} = -17.4671u^2 - 11.9887u\varphi - 16.1219u\varphi' - 38.4774uu' - 6.076\varphi^2 - 5.6617\varphi\varphi' -$$

$$-9.164\varphi u' - 56.9337u'^2 - 43.4589\varphi' u' - 9.3806\varphi'^2 + \eta W^{(2)}(u, u', \varphi, \varphi'),$$

где $W^{(2)}(u, u', \varphi, \varphi')$ – квадратичная форма по переменным u, u', φ, φ'. Последнее слагаемое в производной линейно по η и квадратично по u, u', φ, φ', следовательно оно имеет порядок более высокий, чем квадратичная часть, и не повлияет на знакоотрицательность производной.

Для матрицы квадратичной формы имеем следующие соотношения $\Delta_1 = -17.4671$, $\Delta_2 = 70.1973$, $\Delta_3 = -2437.816$, $\Delta_4 = 2145.509$. Таким образом, согласно критерию Сильвестра, $\dot{V}$ является отрицательно определенной квадратичной формой.

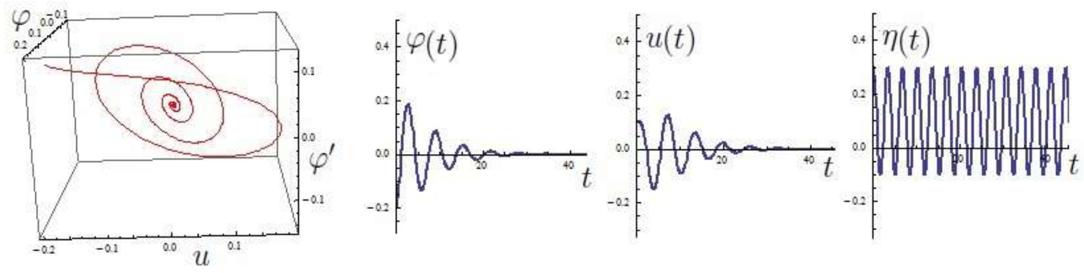

Рис. 2: Фазовые траектории линейной системы.

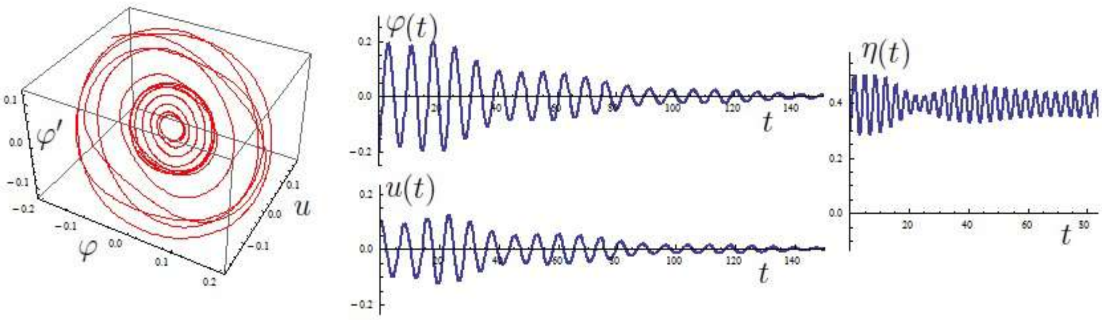

Рис. 3: Фазовые траектории нелинейной системы.

Не трудно видеть, что все условия теоремы выполнены. Следовательно, решение исходной системы равномерно асимптотически устойчиво по части переменных.

На Рис. 2, 3 представлены результаты численного интегрирования уравнений движения исходной системы.

Рассмотрим случай кратных корней. Построим функцию Ляпунова согласно формуле (12). Тогда в исходных переменных функция Ляпунова примет вид

$$V=\alpha_1(\hat{s}_{14}\varphi'+\hat{s}_{13}u'+\hat{s}_{12}\varphi+\hat{s}_{11}u)(\hat{s}_{34}\varphi'+\hat{s}_{33}u'+\hat{s}_{32}\varphi+\hat{s}_{31}u)+$$
$$+\alpha_2(\hat{s}_{24}\varphi'+\hat{s}_{23}u'+\hat{s}_{22}\varphi+\hat{s}_{21}u)(\hat{s}_{44}\varphi'+\hat{s}_{43}u'+\hat{s}_{42}\varphi+\hat{s}_{41}u)+$$
$$+\beta[(\hat{s}_{14}\varphi'+\hat{s}_{13}u'+\hat{s}_{12}\varphi+\hat{s}_{11}u)(\hat{s}_{44}\varphi'+\hat{s}_{43}u'+\hat{s}_{42}\varphi+\hat{s}_{41}u)+$$
$$+(\hat{s}_{34}\varphi'+\hat{s}_{33}u'+\hat{s}_{32}\varphi+\hat{s}_{31}u)(\hat{s}_{24}\varphi'+\hat{s}_{23}u'+\hat{s}_{22}\varphi+\hat{s}_{21}u)],$$

где $\hat{s}_{ij}$ – элементы обратной матрицы к $\boldsymbol{S}$.

Положим $a=0.2, d=0.2, J=0.3,\ \ h=2.0411, k=1.8517$. Тогда $\lambda=-0.5143+0.6853i$, $\bar{\lambda}=-0.5143-0.6853i$.

Пусть $p_1=1, q_2=2$. Тогда матрица перехода $\boldsymbol{S}$ примет вид

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix} 1 & -3.088+1.432i & 1 & -3.088-1.432i \\ -0.655-0.820i & 2 & -0.655+0.820i & 2 \\ -0.514+0.685i & 1.607-2.853i & -0.514-0.685i & 1.607+2.853i \\ 0.899-0.027i & -1.684+0.551i & 0.899+0.027i & -1.684-0.551i \end{pmatrix}.$$

Принимая $\alpha_1=0.5, \alpha_2=0.8, \beta=0.1325<\sqrt{\alpha_1\alpha_2}$, получим

$$V=1.76092u^2+1.8645u\varphi+1.4461uu'-2.4453\varphi' u+0.7223\varphi^2+0.9383\varphi u'-$$
$$-0.6745\varphi\varphi'+0.3568u'^2-0.7097165677\varphi' u'+1.3389\varphi'^2.$$

Для матрицы данной квадратичной формы имеем $\Delta_1=1.7609, \Delta_2=0.4028,\ \ \Delta_3=0.011, \Delta_4=0.0004$. Согласно критерию Сильвестра, V является положительно определенной квадратичной формой.

Производная функции Ляпунова $\dot{V}$ в силу уравнений движения запишется в виде

$$\dot{V}=-0.5382u^2-0.6655u\varphi-0.346uu'+0.8576u\varphi'-0.3348\varphi^2-0.2379\varphi u'+$$

$$+0.1803\varphi\varphi' - 0.8007u'^2 + 0.1716\varphi' u' - 0.6744\varphi'^2 + \eta W^{(2)}(u, u', \varphi, \varphi').$$

По аналогии с вышеизложенным случаем имеем $\Delta_1 = -0.5382$, $\Delta_2 = 0.0694$, $\Delta_3 = -0.0016$, $\Delta_4 = 0.0001$. Таким образом $\dot{V}$ является отрицательно определенной квадратичной формой.

Следовательно, все условия теоремы выполнены, а значит решение исходной системы равномерно асимптотически устойчиво по части переменных.

Вывод

В данной статье решается вопрос об асимптотической устойчивости по части перемеых путем построения функции Ляпунова. Рассмотрен задача стабилизации положения равновесия маятника переменной длины посредством добавления к нему динамического абсорбера. Выяснено, что добавление абсорбера в данном случае ведет к равномерной асимптотической устойчивости по части переменных.

Лiтература

[1] *Зубов В.И.* Проблема устойчивости процессов управления. — Л.: Судостроение, 1980. — 256 с.
[2] *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959. — 211 с.
[3] *Воротников В.И.* К задачам устойчивости по части переменных // Прикл. математика и механика. – 1999. – **63**, вып. 5. – С. 736–745.
[4] *Савченко А.Я., Игнатьев А.О.* Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических сиситем. – Киев: Наукова думка, 1989. – 208 с.
[5] *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
[6] *Воротников В.И., Румянцев В.В.* Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. – М.: Научный мир, 2001. – 320 с.
[7] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

STABILIZATION OF THE SITUATION OF THE LINE OF LOAD LENGTH

Puzirev V., Savchenko M., Kamynina E.

SUMMARY

The problem of constructing the Lyapunov function in the case of asymptotic stability on the part of variables is considered. As an example, a variable-length pendulum with a dynamic absorber attached to it is considered. In this case it is shown that there is a uniform asymptotic stability behind a part of the variables.

Keywords: stability with respect to some variables, Lyapunov function, variable length pendulum.

СТАБIЛIЗАЦIЯ ПОЛОЖЕННЯ РIВНОВАГИ МАЯТНИКА ЗМIННОЇ ДОВЖИНИ

Пузирьов В.Е., Савченко Н.В., Камiнiна О.В.

РЕЗЮМЕ

Розглянуто задачу побудови функцiї Ляпунова у випадку асимптотичної стiйкостi за частиною змiнних. Як приклад, розглянуто маятник змiнної довжини з приєднаним до нього динамiчним абсорбером. Показано, що в даному випадку має мiсце рiвномiрна асимптотична стiйкiсть за частиною змiнних.

Ключовi слова: стiйкiсть за частиною змiнних, функцiя Ляпунова, маятник змiнної довжини.