ISSN 1817-2237. Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. – 2014. – № 2

УДК 517.928

І. Г. Ключник
Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В. Винниченка, м. Кіровоград

ІНТЕГРУВАННЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ЧАСТИНІ ПОХІДНИХ

Пропонується асимптотичний метод інтегрування для лінійної системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних і точкою звороту.
Ключові слова: асимптотичний метод, система диференціальних рівнянь, точка звороту.

Вступ. В [1, 2] розглядаються сингулярно збурені системи з простою, кратною та двома точками звороту. В усіх цих випадках в [1, 2] пропонується асимптотичне зведення сингулярно збуреної системи до деякого канонічного вигляду, а також розглядаються можливості формальної блочної діагоналізації системи. При цьому використані функції Ейрі, Вебера та Уіттекера. До основних методів побудови асимптотичного інтегрування лінійних диференціальних рівнянь з точками звороту відносяться методи Р. Лангера, В. Вазова, А. А. Дородніцина, Цваана-Федорюка, метод зшивання та узгодження асимптотик. Основні ідеї цих методів і огляд літератури з методів асимптотичного інтегрування задач з точками звороту приводяться в [1–8].

В [9] запропонований асимптотичний метод інтегрування лінійної системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних

$$y' = A(x)y + A_1(x)y_1, \quad \varepsilon y'_1 = (B(x) + \varepsilon B_1(x))y_1 + \varepsilon B_2(x)y, \tag{1}$$

де $y \in R^p, y_1 \in R^2$, $B(x)$ – матриця рівняння Ейрі [1], $A(x)$, $A_1(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$ – голоморфні матриці при

$$|x| \le x_0, \tag{2}$$

ε – малий додатній параметр. В [10] одержано асимптотичний метод інтегрування лінійної системи диференціальних рівнянь вигляду (1) в якій $B(x)$ – $m \times m$ -вимірна матриця, вигляду $B(x) = xI_1 + N$, $N-$ нільпотентна матриця, I_1 – матриця з єдиним ненульовим елементом $\{I_1\}_{m1} = 1\ (m > 2)$, $y \in R^p, y_1 \in R^m$. В [11] для цієї системи доведено існування і нескінченну диференційовність матриці перетворення, по дійсним змінним x, ε.

В даній статті розглядається система (1) з матрицею $B(x)$ вигляду

$$B(x) = xI_2 + N, \tag{3}$$

де N – нільпотентна матриця, а ненульові елементи матриці I_2 визначаються з рівності

$$\{I_2\}_{m1} = 1,\ \{I_2\}_{m,m-i} = a_{i+1}(x),\ \{I_2\}_{mm} = 0\ (i = \overline{1, m-2})\quad y \in R^p, y_1 \in R^m,\ m \text{ – додатне число.}$$

Для розглядуваної системи пропонується асимптотичний метод інтегрування, який полягає в зведені до системи, перша компонента якої задовольняє інтегро-диференціальне рівняння вищого порядку з коефіцієнтами, що є формальними рядами за степенями параметра.

Будемо вважати, що

$$\operatorname{tr} B_1(x) = \operatorname{tr} A(x) \equiv 0. \tag{4}$$

За допомогою перетворення $\begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix} = \Phi(x,\varepsilon)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ систему (1) приведемо до вигляду

$$u' = C(\varepsilon)v, \tag{5}$$

$$\varepsilon v' = B(x)v + \varepsilon D(\varepsilon)u, \tag{6}$$

де

$$\Phi(x,\varepsilon) = \begin{pmatrix} U(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_n(x) & \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_{n1}(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_{n1}(x) & V(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_n(x) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$C(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n C_n, \quad D(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n D_n, \tag{8}$$

C_n, D_n – сталі матриці відповідно розмірностей $p\times m, m\times p$ елементи яких є нулі, крім $\{C_n\}_{in}=c_{in}$, $\{D_n\}_{ni}=d_{ni}$, $(i=\overline{1,p})$, а матриці $U(x), U_n(x)$ – $p\times p$ вимірні, $V(x), V_n(x)$ – $m\times m$ вимірні, $V_{n1}(x), U_{n1}(x) - p\times m, m\times p$ відповідно.

Згідно вигляду рівнянь (1), (5), (6) $\Phi(x,\varepsilon)$ формально задовольняє матричне диференціальне рівняння

$$\varepsilon\Phi'+\Phi\begin{pmatrix}0 & \varepsilon C(\varepsilon)\\ \varepsilon D(\varepsilon) & B(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon A(x) & \varepsilon A_1(x)\\ \varepsilon B_2(x) & B(x)+\varepsilon B_1(x)\end{pmatrix}\Phi. \tag{9}$$

Підставляючи (7) в (9) одержимо систему рівнянь

$$U'(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n(U_n'(x)+V_{n1}(x)D(\varepsilon))=A(x)U(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n(A(x)U_n(x)+A_1(x)U_{n1}(x)),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_{n1}'(x)+U(x)C(\varepsilon)+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_n(x)C(\varepsilon)+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n-1}V_{n1}(x)B(x)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n(A(x)V_{n1}(x)+A_1(x)V_n(x))+A_1(x)V(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_{n1}'(x)+V(x)D(\varepsilon)+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_n(x)D(\varepsilon)=B_2(x)U(x)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n(B_2(x)U_n(x)+B_1(x)U_{n1}(x))+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n-1}B(x)U_{n1}(x),$$

$$\varepsilon V'(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n+1}(V_n'(x)U_{n1}(x)C(\varepsilon))+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_n(x)B(x)+$$

$$+V(x)B(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n+1}(B_2(x)V_{n1}(x)+B_1(x)V_n(x))+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n B(x)V_n(x)+\varepsilon B_1(x)V(x)+B(x)V(x). \tag{10}$$

Зрівнюючи в (10) коефіцієнти при ε в нульовому степені, одержимо

$$U'(x)=A(x)U(x), \tag{11}$$

$$U(x)C_0+V_{11}(x)B(x)=A_1(x)V(x), \tag{12}$$

$$V(x)D_0=B_2(x)U(x)+B(x)U_{11}(x), \tag{13}$$

$$V(x)B(x)=B(x)V(x). \tag{14}$$

З (11) і (14) одержимо

$$U(x)=\Omega_0^x(A(x)), \quad V(x)=q_{0m}(x)I+\sum_{r=1}^{m-1}q_{0r}(x)B^{m-r}(x), \tag{15}$$

де $\Omega_0^x(A(x))$ – матрицант рівняння (11), $q_{0i}(x)$ $(i=\overline{1,m})$ – довільні голоморфні функції в області (2), I – одинична матриця.

Для визначення $q_{0i}(x)$ $(i=\overline{1,m})$ використаємо систему рівнянь, які одержуються з (10) зрівнюючи в ній коефіцієнти при першому степені параметра ε:

$$U'_1(x)+V_{11}(x)D_0=A(x)U_1(x)+A_1(x)U_{11}(x), \tag{16}$$

$$V'_{11}(x)+U(x)C_1+U_1(x)C_0+V_{21}(x)B(x)=A(x)V_{11}(x)+A_1(x)V_1(x), \tag{17}$$

$$U'_{11}(x)+V(x)D_1+V_1(x)D_0=B_2(x)U_1(x)+B_1(x)U_{11}(x)+B(x)U_{21}(x), \tag{18}$$

$$V'(x)+V_1(x)B(x)=B(x)V_1(x)+B_1(x)V(x). \tag{19}$$

Згідно лем із [1] для існування розв'язку рівняння (19) необхідно і достатньо виконання наступних умов:

$$\mathrm{tr}((V`(x)-B_1(x)V(x))B^k(x))=0\ (k=\overline{0,m-1}), \tag{20}$$

де $B^0(x)=I$. Підставивши в (20) вигляд $V(x), V'(x)$ з (15) і скориставшись згідно [1], рівністю

$$\mathrm{tr}((B^{n-r}(x))'B^k(x))=(n-r)\mathrm{tr}(B^{n-r-1+k}(x)B'(x)),$$

одержимо

$$S(x)q'_0(x)=T(x)q_0(x), \tag{21}$$

де $q_0(x)$ – m-вимірний вектор з елементами $q_{0i}(x)\ (i=\overline{1,m})$

$$T(x)=T_1(x)+T_2(x),$$

елементи матриць $T_1(x), T_2(x), S(x)$ визначаються за формулами

$$\begin{gathered}\{T_1(x)\}_{kr}=-(m-r)\mathrm{tr}(B^{m-r-2+k}(x)B'(x)),\\ \{T_2(x)\}_{kr}=\mathrm{tr}(B_1(x)B^{m-1-r+k}(x)),\\ \{S(x)\}_{kr}=\mathrm{tr}(B^{m-r+k-1}(x)),\ (k=\overline{1,m},\ r=\overline{1,m}).\end{gathered} \tag{22}$$

Помноживши рівняння (21) зліва на матрицю $D_1(x)$

$$D_1(x)=xI_1+N, \tag{23}$$

одержимо

$$D_1(x)S(x)q'_0(x)=D_1(x)T(x)q_0(x), \tag{24}$$

де $D_1(x)S(x)$ і $D_1(x)T(x)$ при $x\to 0$ мають поведінку

$$D_1(x)S(x)=xK(I+O(x)),\quad D_1(x)T(x)=D_1(0)T(0)+O(x), \tag{25}$$

$K, D_1(0)T(0)-(m\times m)$-верхньотрикутні матриці, елементи яких визначаються за формулами

$$\begin{gathered}\{K\}_{1m}=0,\{K\}_{jj}=m,\{K\}_{i,m-k+i}=ka_k(0),\\ \{D_1(0)T(0)\}_{i,m-k+i}=(k-i)a_k(0)+tr(B_1(0)B^k(0)),\\ \{D_1(0)T(0)\}_{jj}=m-j, j=\overline{1,m}, i=\overline{1,m-1}, k=\overline{1,m-1}.\end{gathered}$$

Враховуючи (25), систему (24) перепишемо у вигляді

$$xq'_0(x)=H(x)q_0, \tag{26}$$

де

$$H(x)=K^{-1}D_1(0)T(0)+O(x). \tag{27}$$

З (27) і явного вигляду $K^{-1}D_1(0)T(0)$ випливає, що матриця $H(0)$ має власні значення $\lambda_i=-(m-i)/m\ (i=\overline{1,m})$. Тоді згідно [1] випливає, що система (26) має ненульовий голоморфний в області (2) розв'язок $q_0(x)$ такий, що $q_{0m}(0)=1$. Підставивши знайдені функції $U(x)$ і $V(x)$ в (12), (13) одержимо рівняння для визначення $C_0, D_0, U_{11}(x), V_{11}(x)$. Помноживши (12) справа на матрицю $B^{m-1}(x)$, а (13) зліва на $B^{m-1}(x)$ одержимо рівняння

$$U(x)C_0B^{m-1}(x)+V_{11}(x)B^m(x)=A_1(x)V(x)B^{m-1}(x), \tag{28}$$

$$B^{m-1}(x)V(x)D_0=B^{m-1}(x)B_2(x)U(x)+B^m(x)U_{11}(x). \tag{29}$$

При $x=0$ із (28), (29) одержимо рівняння для визначення матриць C_0, D_0 :

$$U(0)C_0B^{m-1}(0)=A_1(0)V(0)B^{m-1}(0), \tag{30}$$

$$B^{m-1}(0)V(0)D_0=B^{m-1}(0)B_2(0)U(0). \tag{31}$$

З рівнянь (30), (31) знайдемо:

$$\begin{gathered}\{C_0\}_{i1}=\{A_1(0)V(0)\}_{i1}, \{C_0\}_{ij}=0, \{D_0\}_{mi}=\{B_2(0)U(0)\}_{mi},\\ \{D_0\}_{si}=0\ (i=\overline{1,p}, j=\overline{2,m}, s=\overline{1,m-1}).\end{gathered}$$

Враховуючи (30), (31) для визначення матриць $V_{11}(x), U_{11}(x)$ з (28), (29) отримаємо рівняння вигляду

$$xV_{11}(x)=F(x), \quad xU_{11}(x)=G(x), \tag{32}$$

де $F(x), G(x)-$ відомі матриці. В силу вибору C_0, D_0 маємо $F(0)=0, G(0)=0,$ тоді

$$F(x) = x\int_0^1 F'_x(tx)dt, \quad G(x) = x\int_0^1 G'_x(tx)dt. \tag{33}$$

З врахуванням (32), (33) для $V_{11}(x), U_{11}(x)$ знайдемо значення

$$V_{11}(x)=\int_0^1 F'_x(tx)dt, \quad U_{11}(x)=\int_0^1 G'_x(tx)dt, \tag{34}$$

які визначають голоморфні в області (2) розв'язки рівнянь (32). Отже знайдені коефіцієнти розвинень (7), (8) при ε в нульовому степені маємо систему рівнянь (16)–(19). Поклавши $U_{11}(0)=0$, з рівняння (16) однозначно знаходимо $U_1(x)$, а загальний розв'язок рівняння (19) визначається за формулою

$$V_1(x)=q_{1m}(x)I+\sum_{r=1}^{m-1} q_{1r}(x)B^{m-r}(x)+W_1(x), \tag{35}$$

$W_1(x)-$ частинний розв'язок рівняння (19). З [1] умови існування розв'язку рівняння, що одержується при прирівнюванні коефіцієнтів при ε у другому степені, в останньому рівнянні (10), наступні

$$\mathrm{tr}((B_1(x)V_1(x)-V'_1(x)+F_1(x))B^k(x))\equiv 0 \ (k=\overline{0,m-1}) \tag{36}$$

де $F_1(x)=B_2(x)V_{11}(x)-U_{11}(x)C_0$. Підставивши (35) в (36) одержимо систему рівнянь для визначення $q_{1i}(x) \ (i=\overline{1,m})$

$$S(x)q'_1(x)=T(x)q_1(x)+f(x), \tag{37}$$

де $q_1(x)-m$ -вимірний вектор з компонентами $q_{1i}(x)$,

$$\{f(x)\}_i=\mathrm{tr}((B_1(x)W_1(x)+F_1(x)-W'_1(x))B^{i-1}(x)) \ (i=\overline{1,m}).$$

Помноживши (37) зліва на матрицю $D_1(x)$ маємо

$$xq'_1(x)=H(x)q_1(x)+\tilde{F}_1(x), \tag{38}$$

де $\tilde{F}_1(x)$ згідно (25) при $x\to 0$ має поведінку

$$\tilde{F}_1(x)=(I+O(x))K^{-1}D_1(x)f(x).$$

Система (38) в області (2) має голоморфний розв'язок $q_1(x)$ такий, що $q_{1i}(0)=0 \ (i=\overline{1,m})$ Матриці $V_{21}(x), U_{21}(x), C_1, D_1$ однозначно знаходяться з рівнянь (17), (18). Можна довести, що вказаним алгоритмом однозначно знаходяться довільні коефіцієнти розвинень (7), (8) і коефіцієнти розвинень є голоморфними функціями в області (2).

Матриця (7) при $\varepsilon=0$ має вигляд $\Phi(x,0)=\begin{pmatrix} U(x) & 0 \\ 0 & V(x)\end{pmatrix}$, де $U(x), V(x)$ визначаються за формулами (15). З умови (4) випливає, що $\det U(x)\equiv 1.$ Згідно вибору розв'язку $q_0(x)$ системи рівнянь (31) маємо $V(0)=1,$ а значить існує $x_1\le x_0$ такий, що $\det V(x)\ne 0$ для $|x|\le x_1$. Отже $\det\Phi(x,0)\ne 0$ для $|x|\le x_1$.

Методом із [6] можна довести, що за допомогою заміни $u=V(\varepsilon)w$ система (5), (6) зводиться до вигляду

$$w'_1=c_1(\varepsilon)v_1, \ w'_1=0 \ (i=\overline{2,p}), \tag{39}$$

$$\varepsilon v'=B(x)v+\varepsilon D_1(\varepsilon)w, \tag{40}$$

де $v=(v_1,...v_m)-m$ -вимірний вектор; $c_s=\{C(\varepsilon)\}_{s1}$, $s=\overline{1,p}$; $V(\varepsilon)-p\times p$ -матриця з діагональними елементами рівними одиниці, в якої $\{V(\varepsilon)\}_{i1}=c_i(\varepsilon)/c_1(\varepsilon) \ (i=\overline{2,p})$, при умові, що $c_1(\varepsilon)\ne 0,$ а інші елементи рівні нулю; $D_1(\varepsilon)=D(\varepsilon)V(\varepsilon)=\begin{pmatrix} 0 \\ d_1(\varepsilon)\end{pmatrix}$.

З рівняння (39) маємо

$$w_1 = w_1^0 + c_1(\varepsilon)\int_0^x v_1(t)dt, w_j = w_j^0 \ (j=\overline{2,p}), \tag{41}$$

де $w_i^0 \ (i=\overline{1,p})-$ довільні сталі. З (40), (41) прийдемо до рівняння відносно першої компоненти v_1 вектора v:

$$\varepsilon^m v_1^{(m)} = a_m(x)xv_1 + \varepsilon a_{m-1}(x)xv_1' + \varepsilon^2 a_{m-2}(x)xv_1'' + ... + \tag{42}$$

$$+\varepsilon^{m-3}a_3(x)xv_1^{(m-3)} + \varepsilon^{m-2}a_2(x)xv_1^{(m-2)} + \varepsilon c_0 + \varepsilon\alpha\int_0^x v_1(t)dt,$$

де $c_0 = d_1(\varepsilon)w_0, d_1(\varepsilon) = (d_{11}(\varepsilon),...d_{1p}(\varepsilon)), \alpha = d_{11}(\varepsilon)c_1(\varepsilon), v_i = \varepsilon v_{i-1}', \ (i=\overline{2,m})$.

Частинний розв'язок рівняння (42) можна знайти поклавши $v_1(0)=0, v_1'(0)=0, \ldots v_1^{(m-1)}(0)=0$ і взявши $v_1(x)$ у вигляді степеневого ряду. Міркуючи аналогічно можна знайти m лінійно незалежних розв'язків відповідного до (42) однорідного рівняння та записати загальний розв'язок рівняння (42). Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема. Нехай матриці системи рівнянь (1) голоморфні в області (2). Тоді існують формальні ряди (7), (8), коефіцієнти яких голоморфні в області (2) такі, що $\det\Phi(x,0)\neq 0$ при $|x|\leq x_1 < x_0$ і формальне перетворення з матрицею заміни (7) приводить систему (1) до системи (39), (40). Знаходження розв'язку (39), (40) зводиться до рівняння (42) і співвідношення (41).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Wasow W. Linear turning point theory / W. Wasow. – Springer–Verlag New York Ins., 1985. – 243 p.
2. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений / В. Вазов. – М.: Мир, 1968. – 464 с
3. Найфэ А. Методы возмущений / А. Найфэ. – М.: Мир, 1976. – 456 с.
4. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / М. В. Федорюк. – М.: Наука, 1983. – 352 с.
5. Hanson R. J. Reduction theorems for systems of ordinary differential equations with a turning point / R. J. Hanson // J. Math. Anal. And Appl. – 1966. – Vol. 16. – P. 280–301.
6. Kohno M. On full uniform simplification of even order linear differential equations with a parameter / M. Kohno, S. Ohkohchi, T. Kohmoto // Hiroshima Math. J. – 1979. – Vol. 9. – P. 747–767.
7. Nishimoto T. On an extension theorem and its application for turning point problems of large order / T. Nishimoto // Kodai Math. Sem. Rep. – 1973. – Vol. 25. – P. 458–489.
8. Turritin H. L. Stokes multipliers for asymptotic solutions of a central differential equation / H. L. Turritin // Trans. Am: Math. Soc. – 1950. – Vol. 68. – P. 304–329.
9. Самойленко А. М. Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных / А. М. Самойленко // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 11. – С. 1505–1516.
10. Ключник І. Г. Асимптотичні розв'язки лінійної системи з малим параметром при частині похідних / І. Г. Ключник // Нелінійні коливання. – 2010. – Т. 13, № 1. – С.30–38.
11. Ключник І. Г. Лінійна система диференціальних рівнянь з точкою звороту / І. Г. Ключник // Укр. мат. журн. – 2010. – Т. 62, № 5. – С. 625–642.

Надійшло до редакції 03.04.2014 р.

РЕЗЮМЕ

Предлагается асимптотический метод интегрирования для линейной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных и точкой поворота.

Ключевые слова: асимптотический метод, система дифференциальных уравнений, точка поворота.

SUMMARY

We propose the asymptotic method of the integration of linear system of differential equations with a small parameter at a part of derivateves and a turning point.

Keywords: asymptotic method, a system of differential equations, a turning point.