

УДК 539.3+536.24

Н. С. Бондаренко

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ С ТЕПЛОПРОНИЦАЕМЫМ РАЗРЕЗОМ НА БАЗЕ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ

В случае произвольного теплообмена решена задача теплопроводности для изотропной пластины с теплопроницаемым разрезом. Использована обобщённая теория, в рамках которой температура представляется в виде ряда Фурье по полиномам Лежандра от толщинной координаты. Исходная задача сведена к системе независимых краевых задач для метагармонических уравнений. Исследовано влияние теплофизических параметров материала пластины и разреза на величину скачков компонент возмущённой температуры в разных приближениях.

Ключевые слова: изотропная пластина, теплопроницаемый разрез, произвольный теплообмен, обобщённая теория, метагармоническое уравнение, преобразование Фурье.

Введение. Обзор работ, посвящённых плоским задачам стационарной теплопроводности и термоупругости для тел с теплоизолированными трещинами, приведён в монографиях [1, 2]. Исследования напряжённо-деформированного состояния тел с круговыми теплоизолированными или теплоактивными трещинами широко представлены в работах учёных львовской школы механиков [3–6]. В статье [6] приведён обзор работ, в которых решены задачи теплопроводности и термоупругости для тел с круговыми трещинами в осесимметричной постановке с использованием интегрального преобразования Ханкеля и дуальных интегральных уравнений. Данная тематика привлекает внимание и зарубежных учёных [7, 8].

В этой статье продолжены исследования, приведённые в публикациях [9, 10]. Ранее были решены задачи теплопроводности для изотропной пластины, содержащей разрез: теплоизолированный [9] и теплопроницаемый (при симметричном теплообмене с внешней средой) [10]. Целью статьи является определение возмущённого температурного поля в изотропной пластине, обусловленного наличием теплопроницаемого разреза, в случае произвольного теплообмена. При этом используется обобщённая теория, основанная на разложении температуры в ряд Фурье по полиномам Лежандра [11].

Постановка задачи термоупругости. Рассмотрим несвязную статическую задачу термоупругости для пластин, содержащих теплопроницаемый разрез L . Разрешающая система дифференциальных уравнений рассматриваемой задачи имеет следующий вид [12]:

$$D_T(T) = F_W, \quad (1)$$

$$\vec{D}_U(\vec{U}) = \vec{F}_P(\vec{P}) + \vec{F}_T(T), \quad (2)$$

где D_T – дифференциальный оператор задачи теплопроводности; T – температура; F_W – функция, зависящая от плотности внутренних источников тепла; \vec{D}_U – дифференциальные операторы системы уравнений равновесия изотропных пластин в перемещениях; \vec{U} – вектор перемещений; \vec{F}_P – функции силовой нагрузки \vec{P} ; \vec{F}_T – дифференциальные операторы правых частей уравнений термоупругого равновесия, определяющие термоупругие перемещения. При решении краевых задач термоупругости для изотропных пластин с разрезом уравнения (1) и (2) необходимо решать совместно с граничными условиями (ГУ) на лицевых поверхностях пластин, на линии внешнего граничного контура пластин и на линии разреза.

Первым этапом решения задач термоупругости для пластин с разрезами является решение соответствующей задачи теплопроводности с уравнением (1). Поскольку решение задачи теплопроводности для нетонких изотропных пластин с теплопроницаемым разрезом на базе уточнённой (обобщённой) теории отсутствует, рассмотрим подробное решение этой задачи.

Постановка задачи теплопроводности. Рассмотрим изотропную пластину толщины $2h$ в прямоугольной декартовой системе координат x, y, z . Пластина содержит теплопроницаемый разрез L .

Температура пластины $T(x, y, z)$ определяется из трёхмерного уравнения теплопроводности для изотропного тела. При этом ГУ на лицевых поверхностях пластины отвечают конвективному теплообмену по закону Ньютона с внешней средой:

$$\Delta T = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\pm h} \pm \frac{\alpha^\pm}{\lambda} (T|_{z=\pm h} - \theta^\pm) = 0. \quad (3)$$

Здесь α^\pm, θ^\pm – коэффициенты теплоотдачи и температура внешней среды на поверхностях $z = \pm h$ соответственно; λ – теплопроводность материала пластины.

В случае теплопроницаемого разреза теплота распространяется только поперёк линии разреза. Поэтому ГУ на линии разреза L с нормалью $\vec{n} = (n_1, n_2)$ имеют вид [1]:

$$\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)^\pm - \lambda_n (T^+ - T^-) = 0. \quad (4)$$

Здесь знаками «+» и «-» обозначены граничные значения температуры в соответствии с выбранным направлением нормали \vec{n} ; $\lambda_n = \lambda_c / \delta$ – коэффициент теплопроницаемости разреза, характеризующий его теплопроводность в поперечном направлении, λ_c – теплопроводность материала промежуточного слоя, расположенного между берегами разреза; δ – раскрытие разреза.

Обоснование и методика сведения трёхмерного уравнения теплопроводности (3) к конечной системе двумерных уравнений для конвективного теплообмена между поверхностями и средой приведены в монографии [11]. Вывод приближения порядка N уравнения (3) содержится в статье [13].

В рамках приближения порядка N температура представляется в виде ряда Фурье по полиномам Лежандра от толщинной координаты $P_k = P_k(z/h)$ [11]:

$$T = \sum_{k=0}^N T_k P_k, \quad T_k = \frac{2k+1}{2h} \int_{-h}^h T P_k dz. \quad (5)$$

Коэффициенты разложения T_k удовлетворяют следующей системе уравнений [13]:

$$\Delta T_k + \sum_{m=0}^N A_{km} \frac{T_m}{h^2} = -\frac{\theta_k}{h^2} \quad (k = \overline{0, N}), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (6)$$

где $A_{km} = A_{km}(Bi^\pm, N)$; $\theta_k = \theta_k(Bi^\pm, \theta^\pm, N)$; $Bi^\pm = \alpha^\pm h / \lambda$ – критерий Био на лицевых поверхностях пластины. Элементы матрицы $A_N = \|A_{km}\|$ и вектора $\vec{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N)$ приведены в работе [13].

Перейдём в безразмерную систему координат $x_1 = x/h$, $x_2 = y/h$, $x_3 = z/h$, определённую с точностью до полутолщины пластины h . Тогда система уравнений (6) примет вид:

$$\Delta T_k + \sum_{m=0}^N A_{km} T_m = -\theta_k \quad (k = \overline{0, N}), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \quad (7)$$

ГУ на линии разреза L (4) для компонент температуры T_k запишутся так:

$$\left(\frac{\partial T_k}{\partial n} \right)^\pm - \beta (T_k^+ - T_k^-) = 0 \quad (k = \overline{0, N}), \quad (8)$$

где $\beta = \lambda^* / \delta^*$, $\lambda^* = \lambda_c / \lambda$ – относительная теплопроводность промежуточного слоя; $\delta^* = \delta / h$ – раскрытие трещины в безразмерной системе координат.

Температурное поле в пластине с разрезом T_k^* представим в виде суммы двух компонент

$$T_k^* = T_k^o + T_k \quad (k = \overline{0, N}), \quad (9)$$

где T_k^o – компоненты температуры в сплошной пластине, которые считаем известными; T_k – компоненты возмущённого температурного поля, вызванного наличием разреза.

T_k^o определяются из системы уравнений (7), а T_k – из системы уравнений (7) при $\theta_k = 0$. ГУ для компонент возмущённой температуры T_k на линии L следуют из условий (8) и представлений (9):

$$\left. \frac{\partial T_k}{\partial n} \right|_L - \beta [T_k] = - \left. \frac{\partial T_k^o}{\partial n} \right|_L \quad (k = \overline{0, N}). \quad (10)$$

Здесь и в дальнейшем $[f] = f^+ - f^-$ обозначает скачок функции f при переходе через линию L .

Предполагаем, что внешний граничный контур пластины удалён на значительное расстояние от линии разреза L , а возмущённое температурное поле на линии внешней границы равно нулю.

Таким образом, приближение порядка N трёхмерного уравнения теплопроводности (7) с ГУ (10) и требованием убывания возмущённого температурного поля составляют краевую задачу теплопроводности для пластины с теплопроницаемым разрезом.

Сведение исходной задачи к системе независимых краевых задач для метагармонических уравнений. Запишем систему (7) и ГУ (10) в матрично-векторном виде:

$$\Delta \vec{T} + A_N \vec{T} = 0, \quad \vec{T} = (T_0, T_1, \dots, T_N)^T; \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial \vec{T}}{\partial n} \right|_L - \beta [\vec{T}] = - \left. \frac{\partial \vec{T}^o}{\partial n} \right|_L, \quad [\vec{T}] = ([T_0], [T_1], \dots, [T_N])^T, \quad \vec{T}^o = (T_0^o, T_1^o, \dots, T_N^o)^T. \quad (12)$$

В статье [13] было показано, что

$$A_N = K_N L_N, \quad K_N = \text{diag}\{1, 3, \dots, 2N + 1\},$$

L_N – отрицательно определённая симметрическая матрица.

Рассмотрим матрицу

$$C_N = -K_N^{1/2} L_N K_N^{1/2}, \quad K_N^{1/2} = \text{diag}\{1, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{2N + 1}\}.$$

Матрица C_N является вещественной симметрической матрицей, поэтому её характеристические корни действительны [14]. Кроме того, C_N положительно определена, значит, все её собственные значения положительны [14]. Обозначим собственные значения матрицы C_N через $\rho_0^2, \rho_1^2, \dots, \rho_N^2$.

При этом справедливо соотношение

$$\det(A_N - \lambda E) = \det K_N^{-1/2} \det(K_N L_N - \lambda E) \det K_N^{1/2} = \det(K_N^{1/2} L_N K_N^{1/2} - \lambda E) = \det(-C_N - \lambda E).$$

Следовательно, собственные значения матрицы A_N равны $-\rho_0^2, -\rho_1^2, \dots, -\rho_N^2$.

Пусть $\vec{i}_0, \vec{i}_1, \dots, \vec{i}_N$ – независимые собственные вектора матрицы C_N , имеющие единичную длину и соответствующие собственным значениям $\rho_0^2, \rho_1^2, \dots, \rho_N^2$ (не обязательно различным). Составим ортогональную матрицу $I_N = \|\vec{i}_0 \ \vec{i}_1 \ \dots \ \vec{i}_N\|^T$. Тогда [14]

$$I_N C_N I_N^T = P_N^2 = \text{diag}\{\rho_0^2, \rho_1^2, \dots, \rho_N^2\}.$$

В (11), (12) сделаем замену переменных

$$\vec{T} = K_N^{1/2} I_N^T \vec{t}, \quad \vec{t} = (t_0, t_1, \dots, t_N)^T, \quad (13)$$

где t_k – новые искомые функции. Умножим систему (11) и ГУ (12) на матрицу $I_N K_N^{-1/2}$ слева:

$$\Delta \vec{t} - P_N^2 \vec{t} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta t_k - \rho_k^2 t_k = 0 \quad (k = \overline{0, N}); \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial \vec{t}}{\partial n} \right|_L - \beta [\vec{t}] = \vec{g}|_L, \quad [\vec{t}] = ([t_0], [t_1], \dots, [t_N])^T, \quad \vec{g} = -I_N K_N^{-1/2} \left. \frac{\partial \vec{T}^o}{\partial n} \right|_L. \quad (15)$$

Заметим, что система (14) состоит из независимых однородных метагармонических уравнений.

Построение интегральных представлений решений метагармонических уравнений. Компоненты возмущённой температуры T_k претерпевают скачки первого рода на линии разреза L [1, 2, 15]. Следовательно, и новые искомые функции t_k , являющиеся линейными комбинациями функций T_k , также имеют разрывный характер на линии L . Поэтому их дифференцирование необходимо определять согласно теории обобщённых функций [16]:

$$\frac{\partial t_k}{\partial x_j} = \left\{ \frac{\partial t_k}{\partial x_j} \right\}^K + n_j \delta_L [t_k]; \quad \frac{\partial^2 t_k}{\partial x_j^2} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial t_k}{\partial x_j} \right) \right\}^K + n_j \delta_L \left[\frac{\partial t_k}{\partial x_j} \right] \quad (j = 1, 2; k = \overline{0, N}). \quad (16)$$

Здесь выражение $\left\{ \partial f / \partial x_j \right\}^K$ обозначает классическую производную функции f ; δ_L – двумерная дельта-функция Дирака, сосредоточенная на линии L . Функция δ_L определяется соотношением

$$(\delta_L, f(x_1, x_2)) = \int_L f(x'_1, x'_2) dL, \quad \bar{x}' = (x'_1, x'_2) \in L.$$

Задачу (14), (15) решим с использованием двумерного интегрального преобразования Фурье. Применяя преобразование Фурье к выражениям (16), найдём трансформанты вторых производных [15]:

$$F \left[\frac{\partial^2 t_k}{\partial x_j^2} \right] = -\xi_j^2 \tilde{t}_k + \frac{1}{2\pi} \int_L n_j \left\{ (-i\xi_j) [t_k] + \left[\frac{\partial t_k}{\partial x_j} \right] \right\} \exp\{i(\bar{\xi}, \bar{x}')\} dL \quad (j=1, 2; k=\overline{0, N}), \quad (17)$$

где $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ – координаты текущей точки в пространстве трансформант.

Из ГУ (15) следует, что для теплоизолированного и теплопроницаемого разреза справедливо $[\partial t_k / \partial n] = 0$. Поэтому на основании (17) трансформанта оператора Лапласа имеет вид

$$F[\Delta t_k] = -p^2 \tilde{t}_k - D(t_k) \quad (k=\overline{0, N}), \quad p^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad (18)$$

$$D(t_k) = \frac{i}{2\pi} \int_L (\bar{\xi}, \bar{n}) [t_k] \exp\{i(\bar{\xi}, \bar{x}')\} dL \quad (k=\overline{0, N}).$$

Применим двумерное интегральное преобразование Фурье с учётом (18) к системе (14):

$$(p^2 + \rho_k^2) \tilde{t}_k = -D(t_k) \quad (k=\overline{0, N}). \quad (19)$$

Решая каждое из уравнений (19) относительно \tilde{t}_k , получим

$$\tilde{t}_k = \frac{1}{2\pi} \int_L \tilde{B}_k(\xi_1, \xi_2) [t_k] \exp\{i(\bar{\xi}, \bar{x}')\} dL, \quad \tilde{B}_k(\xi_1, \xi_2) = -i \frac{\xi_1 n_1 + \xi_2 n_2}{p^2 + \rho_k^2} \quad (k=\overline{0, N}).$$

Оригиналы ядер \tilde{B}_k найдём по формуле обращения для преобразования Фурье:

$$B_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_1 n_1 + \xi_2 n_2}{p^2 + \rho_k^2} \exp\{-i(\xi_1 \bar{x}_1 + \xi_2 \bar{x}_2)\} d\xi_1 d\xi_2 \quad (k=\overline{0, N}), \quad (20)$$

где $\bar{x}_1 = x_1 - x'_1$, $\bar{x}_2 = x_2 - x'_2$.

Выделим в интегралах (20) чётные и нечётные части:

$$B_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = -\frac{2}{\pi} \{n_1 \Psi_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + n_2 \Psi_k(\bar{x}_2, \bar{x}_1)\} \quad (k=\overline{0, N}), \quad (21)$$

$$\Psi_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\xi_1}{p^2 + \rho_k^2} \sin \xi_1 \bar{x}_1 \cos \xi_2 \bar{x}_2 d\xi_1 d\xi_2 \quad (k=\overline{0, N}). \quad (22)$$

Перейдём в интегралах Ψ_k к полярным координатам в пространстве оригиналов и трансформант:

$$\bar{x}_1 = r \cos \varphi, \quad \bar{x}_2 = r \sin \varphi, \quad \xi_1 = \rho \cos \theta, \quad \xi_2 = \rho \sin \theta,$$

тогда соотношения (22) примут вид

$$\Psi_k = \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{\rho^2 Y}{\rho^2 + \rho_k^2} d\rho \quad (k=\overline{0, N}). \quad (23)$$

Здесь согласно разложению Якоби-Ангера [17]

$$Y = \sin(rp \cos \varphi \cos \theta) \cos(rp \sin \varphi \sin \theta) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(rp) \cos(2n+1)\varphi \cos(2n+1)\theta,$$

где $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода порядка ν .

Формулы (23) можно представить в виде

$$\Psi_k = \frac{\pi}{2} \cos \varphi \left\{ \int_0^{\infty} J_1(rp) d\rho - \rho_k^2 \int_0^{\infty} \frac{J_1(rp)}{\rho^2 + \rho_k^2} d\rho \right\} \quad (k=\overline{0, N}). \quad (24)$$

Значение несобственного интеграла от функции Бесселя равно $1/r$. Сравнивая вторые интегралы в правых частях (24) с интегральным представлением специальной G -функции [17]

$$G_{n,\nu}(rz) = (-1)^n \left(\frac{r}{2}\right)^{\nu-n} \int_0^\infty \frac{\rho^{\nu-n+1} J_{\nu+n}(r\rho)}{\rho^2 + z^2} d\rho \quad \left(r > 0, \operatorname{Re} z > 0, -1 < \operatorname{Re} \nu < n + \frac{3}{2}\right),$$

заметим, что

$$\Psi_k = \frac{\pi}{2} \cos \varphi \left\{ \frac{1}{r} + \frac{\rho_k^2 r}{2} G_{1,0}(\rho_k r) \right\} \quad (k = \overline{0, N}). \quad (25)$$

На основании (25) ядра (21) равны

$$B_k = -n_0 \left\{ \frac{1}{r} + \frac{\rho_k^2 r}{2} G_{1,0}(\rho_k r) \right\} \quad (k = \overline{0, N}), \quad n_0 = n_1 \cos \varphi + n_2 \sin \varphi. \quad (26)$$

Таким образом, получили интегральные представления искомых функций

$$t_k(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_L B_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2) [t_k] dL \quad (k = \overline{0, N}). \quad (27)$$

Сведение задачи к системе независимых сингулярных интегральных уравнений (СИУ). Рассмотрим прямолинейный теплопроницаемый разрез длины $2l$, расположенный вдоль оси абсцисс симметрично относительно начала координат:

$$L = \{(x_1, x_2) \in R^2 : |x_1| \leq l, x_2 = 0\}. \quad (28)$$

После замены переменных $x_1 = l\zeta$, $x_1' = ls$ интегральные представления искомых функций t_k (27) с учётом выражений для ядер (26) запишутся так:

$$t_k(l\zeta, x_2) = \frac{l}{2\pi} \int_{-1}^1 x_2 \left\{ \frac{1}{r^2} + \frac{\rho_k^2}{2} G_{1,0}(\rho_k r) \right\} [t_k] ds \quad (k = \overline{0, N}), \quad r = \sqrt{l^2(\zeta - s)^2 + x_2^2}. \quad (29)$$

Функции t_k должны удовлетворять ГУ (15). Подставляя выражения (29) в условия (15), получим

$$-\beta_n [t_k] + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 M_k(\zeta - s) [t_k] ds = l g_k(\zeta) \quad (k = \overline{0, N}), \quad (30)$$

где $\beta_n = l\beta$ – параметр теплопроницаемости разреза;

$$M_k(\zeta - s) = \frac{1}{(\zeta - s)^2} + \frac{l^2 \rho_k^2}{2} G_{1,0}(l\rho_k |\zeta - s|) \quad (k = \overline{0, N}).$$

Поскольку компоненты температуры T_k непрерывны на концах линии разреза (28), то и функции t_k также непрерывны в этих точках. Отсюда следуют свойства скачков искомых функций

$$[t_k]_{\pm 1} = 0 \quad (k = \overline{0, N}). \quad (31)$$

Применим к интегралам в левых частях (30) формулу интегрирования по частям, полагая

$$u = [t_k], \quad du = \psi_k(s) ds, \quad \psi_k(s) = \frac{d[t_k]}{ds}, \quad dv = M_k(\zeta - s) ds.$$

Тогда система (30) с учётом условий (31) примет вид

$$-\beta_n [t_k] + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_k(s) ds}{s - \zeta} + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 D_k(\zeta - s) \psi_k(s) ds = l g_k(\zeta) \quad (k = \overline{0, N}), \quad (32)$$

$$D_k(\zeta - s) = \frac{l\rho_k}{2} \operatorname{sign}(\zeta - s) IG_{1,0}(l\rho_k |\zeta - s|) \quad (k = \overline{0, N}), \quad IG_{n,\nu}(s) = \int_0^s G_{n,\nu}(t) dt.$$

Дополнительные условия для независимых СИУ типа Коши второго рода (32) следуют из (31):

$$\int_{-1}^1 \psi_k(s) ds = 0 \quad (k = \overline{0, N}).$$

После определения функций ψ_k скачки $[t_k]$ находятся по формулам

$$[t_k] = \int_{-1}^{\xi} \psi_k(t) dt \quad (k = \overline{0, N}),$$

неизвестные функции t_k – из интегральных представлений (29). Компоненты температуры T_k определяются по формуле (13), а температура в произвольной точке пластины – из ряда (5).

Анализ результатов численных исследований. Для изотропной пластины с прямолинейным теплопроницаемым разрезом исследована зависимость величины возмущённой температуры от теплофизических параметров пластины и разреза. Через линию разреза проходит однородный тепловой поток:

$$\left. \frac{\partial T_0^o}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 1^\circ C, \quad \left. \frac{\partial T_k^o}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 0 \quad (k = \overline{1, N}). \quad (33)$$

Заметим, что в случае симметричного теплообмена ($Bi^+ = Bi^-$) при действии основного температурного поля (33) справедливы соотношения $[T_1] = [T_3] = [T_5] = \dots = 0$. В то время как при произвольном теплообмене действие однородного потока тепла (33) приводит к тому, что скачки всех компонент возмущённой температуры оказываются ненулевыми.

Рассмотрим разрез вида (28) длины 20 ($l = 10$). Рис. 1–4 иллюстрируют зависимость скачков компонент температуры в разных приближениях от параметра теплообмена Bi . Расчёты выполнены для случая верхнего одностороннего теплообмена ($Bi^+ = Bi$, $Bi^- = 0$). На рис. 1, 2 приведены графики скачков $[T_0]$ и $[T_1]$ в первом и третьем приближениях, на рис. 3, 4 – графики скачков $[T_2]$ и $[T_3]$ в третьем приближении. Значения скачков вычислялись в середине разреза, где их модуль максимален.

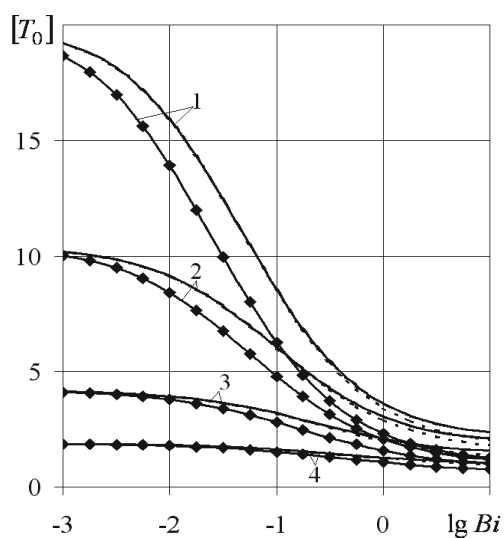


Рис. 1

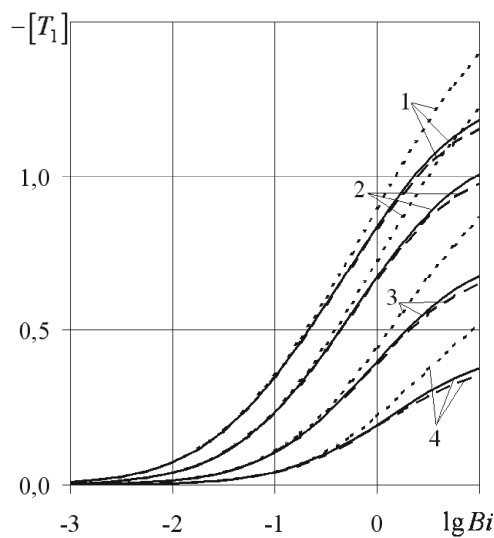


Рис. 2

Также было исследовано влияние параметра теплопроницаемости разреза β_n на максимальные величины скачков компонент возмущённой температуры. Кривые 1, 2, 3, 4 на рис. 1–4 отвечают следующим значениям β_n : 0 (теплоизолированный разрез); 0,5; 2; 5.

Сплошные линии на рис. 1–4 соответствуют третьему приближению трёхмерного уравнения теплопроводности (3), штриховые линии на рис. 1, 2 – первому приближению (на рис. 1 штриховые линии совпадают со сплошными). Пятое приближение уравнения теплопроводности не рассматривалось, поскольку использование приближения $N = 5$ вместо приближения $N = 3$ не вносит существенного уточнения в расчёт возмущённой температуры [9].

Сплошными линиями с маркерами на рис. 1, 3 показаны скачки $[T_0]$ и $[T_2]$ соответственно, найденные в случае симметричного теплообмена ($Bi^+ = Bi^- = Bi$) в рамках третьего приближения [10]. Из рис. 1, 3 видно, что скачки $[T_0]$, $[T_2]$ при симметричном характере теплообмена принимают меньшие значения, чем при верхнем одностороннем теплообмене.

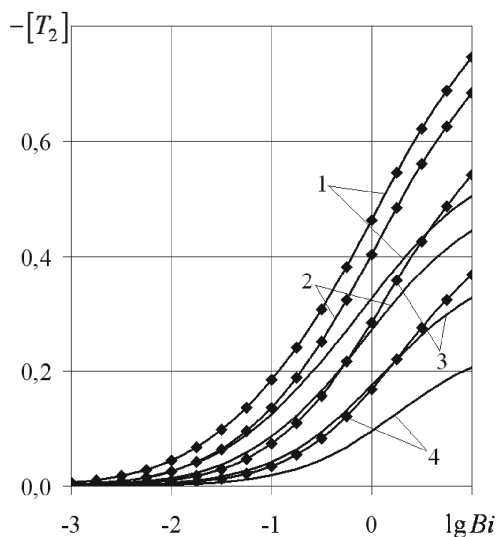


Рис. 3

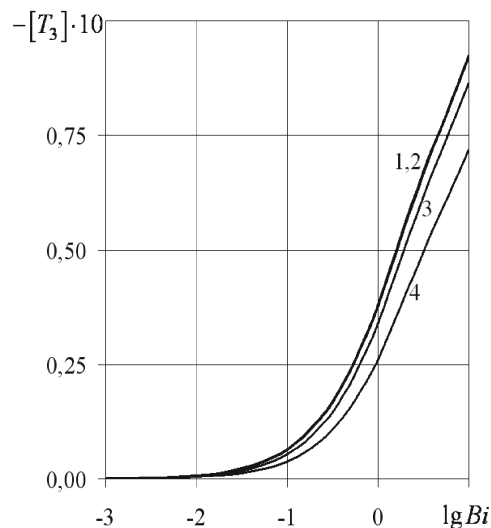


Рис. 4

Из графиков на рис. 1–4 видно, что величина возмущённого температурного поля уменьшается с увеличением теплообмена с внешней средой. Из рис. 1–4 следует, что с увеличением параметра теплопроницаемости разреза β_n скачок $[T_0]$ убывает, а скачки $[T_1] - [T_3]$ возрастают. Поскольку при $Bi \leq 0,1$ абсолютные величины скачков $[T_1] - [T_3]$ меньше модуля скачка $[T_0]$ на порядок, то и скачок возмущённой температуры $[T]$ будет уменьшаться с увеличением β_n .

Для подтверждения достоверности результатов было проведено сравнение скачков $[T_0]$, $[T_1]$, полученных из уравнений теплопроводности на базе обобщённой теории, со скачками температуры, найденной из уравнений теплопроводности, приведённых в монографии [18]. При выводе уравнений теплопроводности в [18] использовался операторный метод и предполагалось линейное распределение температуры по толщине: $T = T_c + x_3 T_m$, где T_c – средняя температура, T_m – температурный момент. На рис. 1, 2 скачки $[T_c]$ и $[T_m]$ показаны пунктирными линиями.

Из рис. 1 видно, что при одностороннем теплообмене скачок компоненты температуры $[T_0]$ практически совпадает со скачком средней температуры $[T_c]$. Тогда как вторую компоненту температуры при $Bi > 0,1$ целесообразно находить из первого приближения уравнения теплопроводности (3) вместо уравнений, приведённых в [18].

Из рис. 3, 4 видно, что при больших значениях Bi скачки $[T_2]$ и $[T_3]$ значительно влияют на величину возмущённого температурного поля. Поэтому использование третьего приближения трёхмерного уравнения теплопроводности (3) вместо первого приближения вносит существенное уточнение в расчёт возмущённой температуры в изотропной пластине, содержащей теплопроницаемый разрез.

По результатам расчёта температуры определено уточнение, вносимое использованием приближения $N = 3$ уравнения теплопроводности (3) вместо приближения $N = 1$. Максимальное значение уточнения равно 0,0167% при $Bi = 10^{-3}$ и с ростом критерия Био на порядок также увеличивается на порядок. Оно достигается на верхней лицевой поверхности пластины ($x_3 = 1$) и практически не зависит от параметра теплопроницаемости разреза β_n .

Выводы. Теплофизические параметры материала пластины и разреза существенно влияют на величину возмущённого температурного поля при действии однородного теплового потока:

- возрастание параметра теплообмена Bi приводит к убыванию возмущённой температуры;
- скачки компонент температуры при верхнем одностороннем теплообмене больше, чем при симметричном теплообмене;
- увеличение параметра теплопроницаемости разреза β_n приводит к убыванию скачка возмущённой температуры.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кит Г. С. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г. С. Кит, М. Г. Кривцун. – К.: Наук. думка, 1984. – 280 с.
2. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А.П. Дацьшин. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
3. Кит Г. С. Вплив джерела тепла на напружений стан тіла з теплоізолюваною круговою тріщиною / Г. С. Кит, О. П. Сушко // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2011. – Вип. 9. – С. 111–121.
4. Кит Г. С. Напружено-деформований стан тіла з теплоактивною тріщиною при контакті її поверхонь / Г. С. Кит, В. А. Галазюк // Вісник Дніпропетровського університету. – 2012. – Т. 20, № 5. Серія «Механіка», вип. 16, Т. 2/1. – С. 67–76.
5. Kit H. S. Axially symmetric problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with thermally active or thermally insulated disk inclusion (crack) / H. S. Kit, O. P. Sushko // J. Math. Sci. – 2011. – 176, No. 4. – P. 561–577.
6. Kit H. S. Problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with heat release on a circular domain (crack) / H. S. Kit // J. Math. Sci. – 2010. – 167, No. 2. – P. 141–153.
7. Chao C. K. Explicit solutions for curvilinear cracks in the thermoelastic medium / C. K. Chao, M. N. Shen // J. Therm. Stresses. – 1993. – Vol. 16, No 3. – P. 215–231.
8. Ueda S. Thermal stress intensity factors for two coplanar cracks in a piezoelectric strip / S. Ueda, Y. Tani // J. Therm. Stresses. – 2008. – Vol. 31, No. 5. – P. 403–415.
9. Бондаренко Н. С. Использование обобщенной теории в задачах теплопроводности для изотропных пластин с теплоизолированным разрезом / Н. С. Бондаренко, А. С. Гольцев // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2012. – Вип. 1. – С. 26–32.
10. Бондаренко Н. С. Решение задачи теплопроводности для изотропной пластины с теплопроницаемым разрезом на базе обобщенной теории при симметричном теплообмене / Н. С. Бондаренко // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2013. – Т. 27. – С. 30–40.
11. Пелех Б. Л. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек / Б. Л. Пелех, М. А. Сухорольский. – К.: Наук. думка, 1980. – 216 с.
12. Коваленко А. Д. Основы термоупругости / А. Д. Коваленко. – К.: Наук. думка, 1970. – 304 с.
13. Bondarenko N. S. Solution of the heat conduction problem for anisotropic plates under concentrated thermal loading using legendre polynomials / N. S. Bondarenko, A. S. Gol'tsev // J. Math. Sci. – 2011. – Vol. 174, No. 3. – P. 400–414.
14. Ланкастер П. Теория матриц / П. Ланкастер. – М.: Наука, 1980. – 280 с.
15. Шевченко В. П. Задачи термоупругости тонких оболочек с разрезами: Учеб. пособие / В. П. Шевченко, А. С. Гольцев. – К.: УМК ВО, 1988. – 84 с.
16. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1967. – 436 с.
17. Хижняк В. К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: учебное пособие / В. К. Хижняк, В. П. Шевченко. – Донецк: ДонГУ, 1980. – 128 с.
18. Подстригач Я. С. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.

Поступила в редакцию 12.02.2014 г.

РЕЗЮМЕ

У випадку довільного теплообміну розв'язана задача теплопровідності для ізотропної пластини з теплопроникним розрізом. Використана узагальнена теорія, у рамках якої температура зображується у вигляді ряду Фур'є за поліномами Лежандра від товщинної координати. Вихідна задача зведена до системи незалежних крайових задач для метагармонічних рівнянь. Досліджено вплив теплофізичних параметрів матеріалу пластини та розрізу на величину стрибків компонент збуреної температури в різних наближеннях.

Ключові слова: ізотропна пластина, теплопроникний розріз, довільний теплообмін, узагальнена теорія, метагармонічне рівняння, перетворення Фур'є.

SUMMARY

A heat conduction problem for an isotropic plate with heat-permeable cut in the case of an arbitrary heat exchange is solved. The generalized theory in which the temperature is represented as a Fourier series in Legendre polynomials of the thickness coordinate is used. The initial problem is reduced to a system of independent boundary value problems for metaharmonic equations. The influence of thermal parameters of the plate material and cut on the value of jumps for perturbed temperature components in different approximations is investigated.

Keywords: isotropic plate, heat-permeable cut, arbitrary heat exchange, generalized theory, metaharmonic equation, Fourier transform.