

УДК 539.3:534.1

И. А. Моисеенко, В. И. Сторожев, М. Н. Чернов

## ПОДМНОЖЕСТВА КРИТИЧЕСКИХ ЧАСТОТ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В ОРТОТРОПНОМ ПРИЗМАТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ РАВНОСТОРОННЕГО ТРЕУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Представлена методика использования треугольных координат для нахождения подмножества критических частот зарождения бегущих нормальных волн в ортотропном призматическом волноводе равностороннего треугольного сечения с закрепленными либо свободными от напряжений граничными поверхностями. Определяются критические частоты, на которых плоскость сечения волновода совершает поперечные изгибные колебания и бегущие нормальные волны зарождаются как продольные. Для волновода с закрепленной боковой поверхностью проиллюстрированы зависимости низших критических частот рассматриваемого типа от соотношения модулей продольного сдвига в ортогональных упруго-эквивалентных направлениях, характеризующего степень его анизотропии.

*Ключевые слова:* протяженный ортотропный призматический волновод, равностороннее треугольное сечение, закрепленная или свободная боковая поверхность, нормальные упругие волны, критические частоты, поперечные изгибные колебания сечения, зависимости от параметра анизотропии.

**Введение.** Поиск критических частот нормальных волн для волноводов с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами является одной из важных составляющих при решении задач описания соответствующих дисперсионных спектров [1–5]. Применительно к протяженным анизотропным волноводам многоугольного сечения численно-аналитические исследования процессов распространения нормальных упругих волн представлены в весьма ограниченном ряде публикаций. Так в работах [6–11] подобная задача рассматривалась на уровне концептуального описания возможных теоретических подходов к ее решению. В работах [12, 13] с использованием численно-аналитических подходов получен ряд результатов для волн в призматических волноводах прямоугольного сечения.

В настоящей статье представлена методика использования треугольных координат [14–22] для нахождения подмножества критических частот зарождения бегущих однопарциальных нормальных волн с ненулевой продольной составляющей в ортотропном призматическом волноводе равностороннего треугольного сечения с закрепленными либо свободными от напряжений граничными поверхностями.

**Постановка задачи.** Рассматривается проблема теоретического описания спектра нормальных упругих волн, распространяющихся вдоль протяженного призматического волновода из монокристалла орторомбической системы с равносторонним треугольным сечением и закрепленной либо свободной от механических напряжений границей  $\Gamma$ .

Динамические упругие перемещения  $u_j(x_1, x_2, x_3, t)$  ( $j = \overline{1,3}$ ) в исследуемых волнах рассматриваются как функции отнесенных к линейному параметру  $a^*$  нормированных прямоугольных координат  $Ox_1x_2x_3$ , связанных с кристаллографическими направлениями материала волновода и имеющих ориентированную вдоль образующей волновода ось  $Ox_3$ . Они подлежат определению из краевой задачи для системы уравнений динамического деформирования

$$L_{ij}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t)u_j = 0 \quad (i, j = \overline{1,3}); \quad (1)$$

$$\begin{aligned} L_{11} &= c_{11}\partial_1^2 + c_{66}\partial_2^2 + c_{55}\partial_3^2 - \rho\partial_t^2, & L_{22} &= c_{66}\partial_1^2 + c_{22}\partial_2^2 + c_{44}\partial_3^2 - \rho\partial_t^2, \\ L_{33} &= c_{55}\partial_1^2 + c_{44}\partial_2^2 + c_{33}\partial_3^2 - \rho\partial_t^2, & L_{12} &= L_{21} = (c_{12} + c_{66})\partial_1\partial_2, \\ L_{13} &= L_{31} = (c_{13} + c_{55})\partial_1\partial_3, & L_{23} &= L_{32} = (c_{23} + c_{44})\partial_2\partial_3, \quad \partial_j = \partial / \partial x_j \end{aligned} \quad (2)$$

с краевыми условиями одного из двух типов

$$(u_j)_{\Gamma} = 0; \quad (3)$$

$$(\sigma_{nj})_{\Gamma} = 0, \quad (4)$$

где  $c_{ij}$  – отнесенные к нормирующему параметру  $c^*$  упругие постоянные материала волновода,  $\rho$  – плотность,  $\sigma_{nj}$  – напряжения на площадках его граничной поверхности.

При введених исходних представлених для  $u_j(x_1, x_2, x_3, t)$  для розповсюджуючихся вздовж  $Ox_3$  нормальних волн з циклічною частотою  $\omega$  і хвильовим числом  $k$

$$u_j(x_1, x_2, x_3, t) = u_j^{(0)}(x_1, x_2) \cdot \exp(-i(\omega t - kx_3)) \quad (j = \overline{1,3}) \quad (5)$$

система (1), (2) трансформується к виду

$$L_{ij}(\partial_1, \partial_2, ik, -i\omega)u_j^{(0)} = 0 \quad (i, j = \overline{1,3}). \quad (6)$$

На критических частотах система уравнений (6) распадается на подсистему

$$L_{ij}(\partial_1, \partial_2, 0, -i\omega)u_j^{(0)} = 0 \quad (i, j = \overline{1,2}), \quad (7)$$

и отдельное уравнение

$$L_{33}(\partial_1, \partial_2, 0, -i\omega)u_3^{(0)} = (\partial_1^2 + \delta \partial_2^2 + \Omega^2)u_3^{(0)} = 0, \quad (8)$$

где

$$\delta = c_{44} / c_{55}, \quad \Omega^2 = \rho \omega^2 a_*^2 (c_{55} c_*)^{-1}.$$

Система (7) описывает на этих критических частотах плоские колебания сечения волновода и зарождение бегущих нормальных волн как сдвиговых, а уравнение (8) соответственно описывает поперечные изгибные колебания сечения волновода и зарождение бегущих нормальных волн как продольных.

Исследование краевой задачи для уравнения (8) с вытекающими из (3), (4) краевыми условиями

$$(u_3)_{\Gamma} = 0 \quad (9)$$

либо

$$(\sigma_{n3})_{\Gamma} = 0 \quad (10)$$

эффективно реализуется с использованием аппарата треугольных координат [14–22] для построения множества представлений  $u_3^{(0)}$ , априори удовлетворяющих краевым условиям (9) или (10).

**Получение и анализ значений для критических частот, соответствующих изгибным колебаниям сечения волновода.** Наряду с координатами  $Ox_1x_2$  в плоскости поперечного сечения волновода с границей  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_- \cup \Gamma_+$  вводятся в рассмотрение прямоугольные координаты [14–22] (рис. 1)

$$\xi = R - x_2 = u, \quad \eta = \sqrt{3}(x_1 - \sqrt{3}R) = v - w,$$

где величины

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 - \sqrt{3}R) + \frac{1}{2}(x_2 - R),$$

$$w = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}R - x_1) + \frac{1}{2}(x_2 - R)$$

обладают свойствами

$$u + v + w = 0 \text{ и } (u)_{\Gamma_0} = (v)_{\Gamma_-} = (w)_{\Gamma_+} = R.$$

Во введенных координатах соотношения краевой задачи (8)–(10) соответственно принимают вид

$$\left( \delta \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 3 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \Omega^2 \right) u_3^{(0)} = 0; \quad (11)$$

$$(u_3^{(0)})_{\Gamma_0} = (u_3^{(0)})_{\Gamma_-} = (u_3^{(0)})_{\Gamma_+} = 0; \quad (12)$$

$$\left( \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial n_0} \right)_{\Gamma_0} = \left( \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial n_-} \right)_{\Gamma_-} = \left( \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial n_+} \right)_{\Gamma_+} = 0. \quad (13)$$

В отдельности могут быть рассмотрены случаи поиска критических частот, на которых формы поперечных колебаний сечения обладают симметрией либо антисимметрией относительно высоты сечения  $v = w$ .

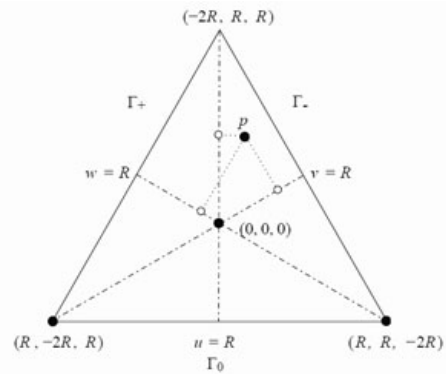


Рис. 1. Треугольная система координат

При поиске множества критических частот с симметричными формами поперечных колебаний сечения для волновода с закрепленной границей определяющие такие формы частные решения краевой задачи (11), (12), тождественно удовлетворяющие краевым условиям (12), выбираются в виде

$$u_{3s}^{(l,m,n)} = \sin\left(\frac{\pi l}{3R}(u+2R)\right) \cdot \cos(\beta_{1mn}(v-w)) + \sin\left(\frac{\pi m}{3R}(u+2R)\right) \cdot \cos(\beta_{2nl}(v-w)) + \sin\left(\frac{\pi n}{3R}(u+2R)\right) \cdot \cos(\beta_{3lm}(v-w)), \quad (14)$$

где  $(l, m, n)$  – кортежи целочисленных параметров, удовлетворяющих условию  $l + m + n = 0$ ; значения параметров  $\beta_j$  определяются выражениями

$$\beta_{mnl} = \frac{\pi(m-n)}{9R}, \quad \beta_{2nl} = \frac{\pi(n-l)}{9R}, \quad \beta_{3lm} = \frac{\pi(l-m)}{9R}. \quad (15)$$

Соответственно значения приведенных критических частот, отвечающих формам (14), задаются формулами

$$\Omega_{mn} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}R} \sqrt{(3\delta+1)(m^2+n^2) + 2mn(3\delta-1)} \quad (m > n > 0). \quad (16)$$

Частные решения краевой задачи (11), (12), тождественно удовлетворяющие краевым условиям (12) и описывающие антисимметричные поперечные изгибные колебания плоскости сечения волновода с закрепленной границей на задаваемых формулой (16) критических частотах имеют вид

$$u_{3a}^{(l,m,n)} = \sin\left(\frac{\pi l}{3R}(u+2R)\right) \cdot \sin(\beta_{1mn}(v-w)) + \sin\left(\frac{\pi m}{3R}(u+2R)\right) \cdot \sin(\beta_{2nl}(v-w)) + \sin\left(\frac{\pi n}{3R}(u+2R)\right) \cdot \sin(\beta_{3lm}(v-w)),$$

с определяемыми из формул (15) значениями параметров  $\beta_{j pq}$ .

Формы симметричных относительно высоты  $v = w$  форм колебаний сечения волновода со свободной граничной поверхностью, тождественно удовлетворяющие краевым условиям (13), имеют представления

$$\tilde{u}_{3s}^{(l,m,n)} = \cos\left(\frac{\pi l}{3R}(u+2R)\right) \cdot \cos(\beta_{1mn}(v-w)) + \cos\left(\frac{\pi m}{3R}(u+2R)\right) \cdot \cos(\beta_{2nl}(v-w)) + \cos\left(\frac{\pi n}{3R}(u+2R)\right) \cdot \cos(\beta_{3lm}(v-w)),$$

а формы антисимметричных форм колебаний сечения волновода для этого типа краевых условий определяются выражением

$$\tilde{u}_{3a}^{(l,m,n)} = \cos\left(\frac{\pi l}{3R}(u+2R)\right) \cdot \sin(\beta_{1mn}(v-w)) + \cos\left(\frac{\pi m}{3R}(u+2R)\right) \cdot \sin(\beta_{2nl}(v-w)) + \cos\left(\frac{\pi n}{3R}(u+2R)\right) \cdot \sin(\beta_{3lm}(v-w)).$$

Приведенные критические частоты рассматриваемых нормальных волн во всех перечисленных случаях задания краевых условий и типа симметрии перпендикулярных плоскости сечения колебательных движений определяются соотношениями (16).

На рис. 2. представлены зависимости ряда низших критических частот исследуемого типа для анизотропных волноводов с варьируемым параметром сдвиговой анизотропии  $\delta \in [0.1, 10]$ . Анализируемые зависимости  $\Omega_{mn}(\delta)$  для всех значений параметров  $m, n$  форм колебаний сечения на критических частотах являются монотонно возрастающими и степени их возрастания увеличиваются при росте значений  $m, n$ .

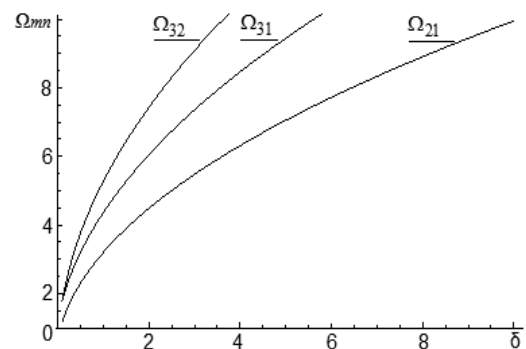


Рис. 2. Зависимости приведенных значений низших критических частот от параметра анизотропии  $\delta$

**Выводы.** В итоге проведенных теоретических исследований с использованием аппарата треугольных координат получено явное аналитическое выражение для значений множества критических частот нормальных упругих волн в протяженном прямолинейно-ортотропном призматическом волноводе равностороннего треугольного сечения, на которых его плоскость совершает поперечные изгибные колебания и бегущие нормальные волны зарождаются как продольные. Для волновода с закрепленной боковой поверхностью проиллюстрированы зависимости значений низших критических частот этого типа от параметра соотношения модулей продольного сдвига в ортогональных упруго-эквивалентных направлениях материала волновода, характеризующего степень его анизотропии.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гринченко В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. – К.: Наук, думка, 1981. – 284 с.
2. Миттра Р. Аналитические методы теории волноводов / Р. Миттра, С. Ли. – М.: Мир, 1974. – 327 с.
3. Gopalakrishnan S. Spectral Finite Element Method: Wave Propagation, Diagnostics and Control in Anisotropic and Inhomogeneous Structures / S. Gopalakrishnan, A. Chakraborty, D. R. Mahapatra. – London: Springer-Verlag, 2008. – 449 p.
4. Elastic waveguides: history and the state of art. II. / V. V. Meleshko, A. A. Bondarenko, S. A. Dovgij et al. // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – Vol. 162 (1). – P. 99–120.
5. Elastic waveguides: history and the state of art. I. / V. V. Meleshko, A. A. Bondarenko, A. N. Trofimchuck, R. Z. Abasov // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – Vol. 167 (2). – P. 197–216.
6. Aalami B. Waves in Prismatic Bars of Arbitrary Cross-Section. / B. Aalami // Journal of Applied Mechanics. Transactions of the ASME. – 1973. – Vol. 40, No 4. – P. 1067–1077.
7. Hayashi T. Guided wave dispersion curves for a bar with an arbitrary cross section, a rod and rail example / T. Hayashi, W. J. Song, J. L. Rose // Ultrasonics. – 2003. – Vol. 41. – P. 175–183.
8. Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section / I. Bartoli, A. Marzani, H. Matt et al. // Journal of Sound and Vibration. – 2006. – Vol. 295, No 3. – P. 685–707.
9. Castaings M. Finite Element Model for Waves Guided along Solid Systems of Arbitrary Section Coupled to Infinite Solid Media / M. Castaings, M. Lowe // Journal of the Acoustical Society of America. – 2008. – Vol. 123. – P. 696–708.
10. Nagaya K. Dispersion of elastic waves in bars with polygonal cross section / K. Nagaya // Journal of the Acoustical Society of America. – 1981. – Vol. 22, No 3. – P. 763–770.
11. Dispersion and excitability of guided acoustic waves in isotropic beams with arbitrary cross section / P. Wilcox, M. Evans, O. Diligent et al. // Review of Progress in quantitative NDE. – 2002. – Vol. 21. – P. 203–210.
12. Бондаренко А. А. Нормальные упругие волны в прямоугольном волноводе / А. А. Бондаренко // Акустичний вісник. – 2007. – Вип. 18. – С. 100–103.
13. Бондаренко А. О. Моды Ламе для пружного прямокутника / А. О. Бондаренко // Вісник Київського університету. Серія: Математика. Механіка. – 2007. – Т. 10, № 4. – С. 12–27.
14. Dassios G. The basic elliptic equations in an equilateral triangle / G. Dassios, A. S. Fokas // Proceedings of the Royal Society A. – 2005. – Vol. 461, No 2061. – P. 2721–2748.
15. McCartin B. J. Modal Degeneracy in Equilateral Triangular Waveguides / B. J. McCartin // Journal of Electro-magnetic Waves and Applications. – 2002. – Vol. 16, No 7. – P. 943–956.
16. McCartin B. J. Eigenstructure of the equilateral triangle, Part I: the Neumann problem / B. J. McCartin // Mathematical Problems in Engineering. – 2002. – Vol. 8, No 6. – P. 517–539.
17. McCartin B. J. Eigenstructure of the equilateral triangle, Part I: the Dirichlet problem / B. J. McCartin // Society for Industrial and Applied Mathematics Review. – 2003. – Vol. 45, No 2. – P. 267–287.
18. McCartin B. J. Eigenstructure of the Equilateral Triangle, Part III: The Robin Problem / B. J. McCartin // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. – 2004. – Vol. 16. – P. 807–825.
19. McCartin B. J. Eigenstructure of the Equilateral Triangle, Part IV: The Absorbing Boundary Condition / B. J. McCartin // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2007. – Vol. 37, No 3. – P. 395–422.
20. McCartin B. J. Spectral structure of the equilateral triangle I: Lamé's formulas / B. J. McCartin // Proceedings of the American Conference on Applied Mathematics (March 24–26, 2008, Cambridge, Massachusetts). – P. 201–208.
21. McCartin B. J. Eigenstructure of the Discrete Laplacian on the Equilateral Triangle: The Dirichlet & Neumann Problems / B. J. McCartin // Applied Mathematical Sciences. – 2010. – Vol. 4, No 53. – P. 2633–2646.
22. Práger M. Eigenvalues and Eigenfunctions of the Laplace Operator on an Equilateral Triangle / M. Práger // Applications of Mathematics. – 1998. – Vol. 43, No 4. – P. 311–320.

*Поступила в редакцію 29.05.2014 з.*

## РЕЗЮМЕ

Представлено методику використання трикутних координат для знаходження підмножини критичних частот зародження біжучих нормальних хвиль в ортотропному призматичному хвилеводі рівностороннього трикутного перетину із закріпленими або вільними від напружень граничними поверхнями. Визначаються критичні частоти, на яких площина перетину хвилеводу здійснює поперечні згинні коливання і біжучі нормальні хвилі зароджуються як

поздовжні. Для хвилеводу із закріпленою бічною поверхнею проілюстровані залежності нижчих критичних частот розглянутого типу від співвідношення модулів поздовжнього зсуву в ортогональних пружно-еквівалентних напрямках, що характеризує ступінь його анізотропії.

*Ключові слова:* видовжений ортотропний призматичний хвилевід, рівносторонній трикутний перетин, закріплена або вільна бокова поверхня, нормальні пружні хвилі, критичні частоти, поперечні згінні коливання перетину, залежності від параметру анізотропії.

#### **SUMMARY**

Is presented the technique use of triangular coordinates for finding of values of the critical frequencies of normal waves in orthotropic prismatic waveguide equilateral triangular cross-section with fixed or free from stress boundary surfaces. Determined the critical frequencies at which the plane of cross section of the waveguide makes flexural vibrations and running normal waves are generated as longitudinal. Is illustrated dependence of the lowest critical frequencies that are studied from the relations for moduli of longitudinal shear in orthogonal elastic-equivalent directions which characterizes degree of anisotropy waveguide for a waveguide with a fixed lateral surface.

*Keywords:* longest orthotropic prismatic waveguide, equilateral triangular cross-section, fixed or free lateral surface, normal elastic waves, critical frequency, flexural vibrations of cross-sectional, dependence on the anisotropy parameters.