

## СТАТИЧЕСКИЙ ПРОГИБ УПРУГИХ ОСНОВАНИЙ ЖЕСТКОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО КАНАЛА С ЖИДКОСТЬЮ

В линейной постановке полученные функции статических прогибов упругих оснований в виде закрепленных прямоугольных пластин в жестком прямоугольном канале с двухслойной идеальной несжимаемой жидкостью, разделенной упругой пластиной. Рассмотрены случаи вырождения пластин в мембраны и отсутствия одной из жидкостей. Проведенные исследования статических прогибов пластин от упругих и массовых характеристик, плотностей и глубин заполнения жидкостей. На основе проведенных численных исследований определены области изменения безразмерных параметров, при которых статическая задача описывается в рамках линейной теории, что является необходимым условием для решения динамической задачи.

**Ключевые слова:** *гидроупругость, статическая плоская задача, прямоугольные пластины, идеальная жидкость.*

### Введение

На основании единого Лагранжевого подхода задача о колебании и устойчивости упругой прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в жестком прямоугольном канале, по видимому, впервые была рассмотрена в статье [1] и в монографии [2]. В работе [3] эта задача была рассмотрена на основании Лагранжево-Эйлера подхода. Наиболее полное исследование свободных колебаний мембраны на свободной поверхности жидкости в прямоугольном канале было проведено в статье [4]. В работах [5, 6] эта задача была обобщена на случай двухслойной жидкости с мембранами на свободной и внутренней поверхностях, а в статье [7] затем обобщена на случай упругого дна. Более общая задача была исследована в [8]. С позиции функционального анализа, задача о колебании идеальной несжимаемой жидкости в контейнере с упругими днищами была рассмотрена в [9, 10].

Исследования статической задачи позволит найти ограничения на безразмерные параметры рассматриваемой механической системы при которых прогибы пластин остаются в рамках линейной теории, что является необходимым условием для решения динамической задачи.

### Постановка завдання

Рассмотрим статический прогиб упругой прямоугольной пластины, горизонтально разделяющей идеальные несжимаемые жидкости разной плотности в жестком прямоугольном канале шириной  $b$  ( $b = 2a$ ) с упругим верхним и нижним основаниями. Упругие основаниям представлены в виде прямоугольных пластин. Верхняя жидкость плотности  $\rho_1$  и нижняя плотности  $\rho_2$  заполняют сосуд соответственно до глубин  $h_1$  и  $h_2$ . Пластины будем считать изотропными, с постоянной изгибной жесткостью  $D_i$  и растягивающими усилиями  $T_i$  в срединной поверхности ( $i = \overline{1, 3}$ ). Индекс  $i = 1$  будет соответствовать

верхней пластине,  $i = 2$  – внутренней, а  $i = 3$  – нижней пластине. Контуры всех пластин заземлены. Систему координат  $Oxyz$  расположим так, чтобы плоскость  $Oxy$  находилась на невозмущённой срединной поверхности внутренней пластины, ось  $Oy$  была направлена вдоль канала по его центру, а ось  $Oz$  – противоположно вектору ускорения силы тяжести  $\vec{g}$

В статье [8] были рассмотрены колебания пластины, разделяющей жидкости разной плотности в жестком прямоугольном канале с упругими основаниями. Прогиб пластин разыскивался в виде суммы динамического и статического прогибов.

Краевая задача для определения статического прогиба заземленных пластин имеет вид:

$$\begin{aligned} D_i \frac{d^4 f_i}{dx^4} - T_i \frac{d^2 f_i}{dx^2} + g \Delta \rho_i f_i &= \Delta C_i - g \delta_{i,1,3} \quad (i = \overline{1,3}) \\ f_i|_{x=\pm a} &= 0, \quad \left. \frac{df_i}{dx} \right|_{x=\pm a} = 0 \quad (i = \overline{1,3}) \\ \int_{-a}^a f_1 dx &= \int_{-a}^a f_2 dx = \int_{-a}^a f_3 dx. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\Delta C_i = C_i - C_{i-1}$  ( $C_0 = C_3 = 0$ ),  $\delta_{i,1,3} = \rho_1 h_1 \delta_{i1} + \rho_2 h_2 \delta_{i3}$ .

Функции  $f_i(x)$  и константы  $C_1$  и  $C_2$  являются неизвестными и подлежат определению.

На основании операторных методов в монографии [9] показана разрешимость статической задачи для произвольного жесткого контейнера с упругими днищами.

Некоторые частные случаи краевой задачи (1).

*Случай трех мембран* ( $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ ). В этом случае краевая задача (1) запишется так

$$\begin{aligned} -T_1 \frac{d^2 f_1}{dx^2} + g \rho_1 f_1 &= C_1 - g \rho_1 h_1, \\ -T_2 \frac{d^2 f_2}{dx^2} + g \Delta \rho f_2 &= C_2 - C_1, \\ -T_3 \frac{d^2 f_3}{dx^2} - g \rho_2 f_3 &= -C_2 - g \rho_2 h_2, \end{aligned} \quad (2)$$

$$f_i|_{x=\pm a} = 0 \quad (i = \overline{1,3}), \quad (3)$$

$$\int_{-a}^a f_1 dx = \int_{-a}^a f_2 dx = \int_{-a}^a f_3 dx. \quad (4)$$

Введем безразмерные переменные:

$$\tilde{C}_i = \frac{C_i}{g \rho_i} \quad (i = 1, 2), \quad \rho_{21} = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{a}, \quad \mu_i = \sqrt{\frac{g \rho}{T_i}} a \quad (i = \overline{1,3}).$$

В дальнейшем знак тильды будем опускать.

Решение системы дифференциальных уравнений (2) с граничными условиями (3) имеет вид:

$$\begin{aligned} f_1 &= (C_1 - h_1) \left( 1 - \frac{\cosh \mu_1 x}{\cosh \mu_1} \right), \\ f_2 &= \frac{C_1 - \rho_{21} C_2}{1 - \rho_{21}} \left( 1 - \frac{\cos \mu_2 x}{\cos \mu_2} \right), \\ f_3 &= (C_2 - h_2) \left( 1 - \frac{\cosh \mu_3 x}{\cosh \mu_3} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Подставив (5) в (4), получим линейную систему относительно неизвестных констант  $C_1$  и  $C_2$ . Введу громоздкости этих выражений приводить их не будем. Подставив найденные значения констант  $C_1$  и  $C_2$  в (5), получим решение рассматриваемой задачи.

На рис. 1–8 приведены графики прогибов  $f_i(x)$  ( $i = \overline{1, 3}$ ), вычисленные при  $h_1 = h_2 = 1$ ,  $a = 0$ . График, похожий на «прямоугольник» это график  $f_1(x)$ . На рис. 1–4  $\rho_1 = 980$ ,  $\rho_2 = 1000$ ,  $\mu_1 = 31.305$  где  $\mu_3 = 1.414$  (рис. 1),  $\mu_3 = 1.000$  (рис. 2),  $\mu_3 = 0.316$  (рис. 3) и  $\mu_3 = 0.100$  (рис. 4).

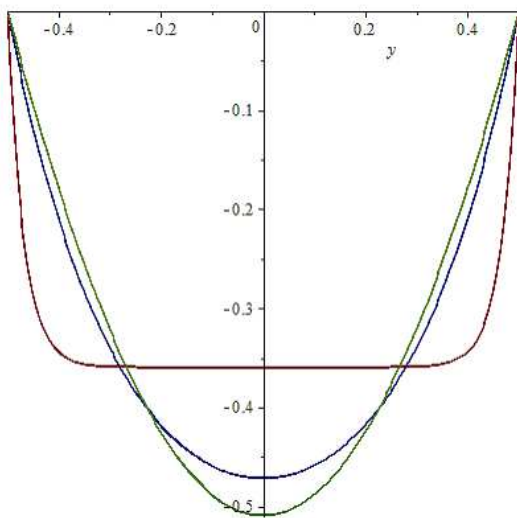


Рис. 1:  $T_1 = 10$ ,  $T_2 = 10$ ,  $T_3 = 5000$ .

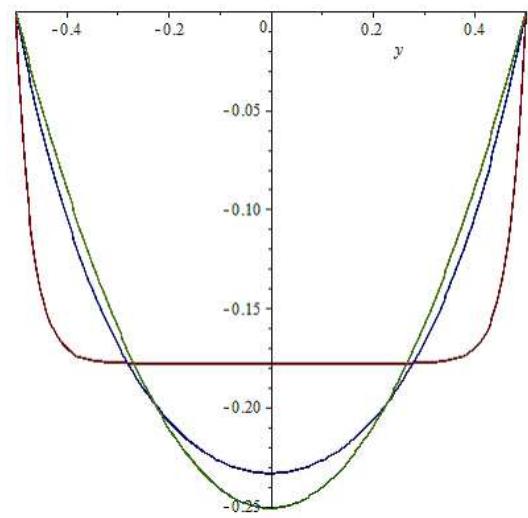


Рис. 2:  $T_1 = 10$ ,  $T_2 = 10$ ,  $T_3 = 10^4$ .

На рис. 5–8 значения плотностей  $\rho_1$  и  $\rho_2$  поменялись местами. На рис. 5–8  $\rho_1 = 1000$ ,  $\rho_2 = 980$ ,  $\mu_1 = 31.305$ ,  $\mu_2 = 4.472$ , где  $\mu_3 = 1.400$  (рис. 5),  $\mu_3 = 3.130$  (рис. 6),  $\mu_3 = 0.990$  (рис. 7) и  $\mu_3 = 0.313$  (рис. 8).

Из рис. 1–8 следует, что при увеличении натяжения только одной мембраны прогибы всех трех мембран уменьшаются. Это имеет понятную физическую природу. Из рис. 1–2 видно, что увеличение натяжения третьей мембраны в два раза привело к уменьшению прогибов мембран примерно в два раза, а из рис. 2–4 – увеличение натяжения третьей мембраны в десять раз привело к уменьшению прогибов примерно в десять раз. Аналогичную ситуацию мы видим и на рис. 6–8, когда значения плотностей  $\rho_1$  и  $\rho_2$  поменялись местами, что привело к незначительному увеличению прогибов (см. рис. 1 и рис. 3).

Случай двух мембран и нижней пластины ( $D_1 = D_2 = 0$ ,  $T_3 = 0$ ). В этом случае

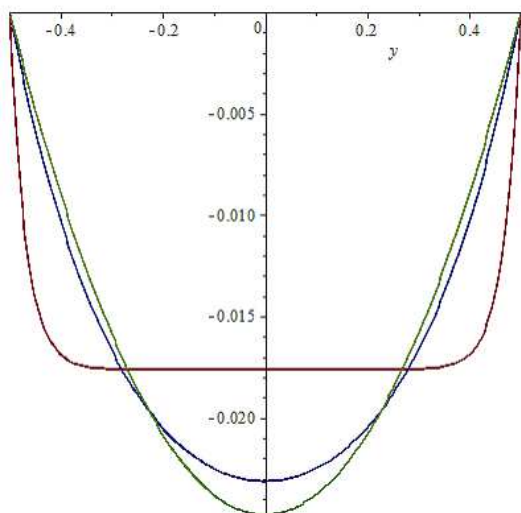


Рис. 3:  $T_1 = 10, T_2 = 10, T_3 = 10^5$ .

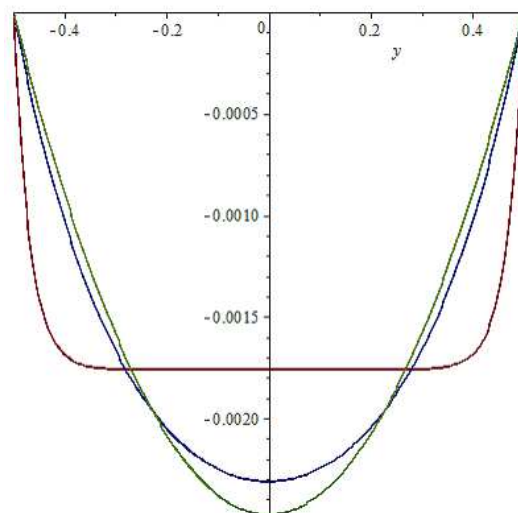


Рис. 4:  $T_1 = 10, T_2 = 10, T_3 = 10^6$ .

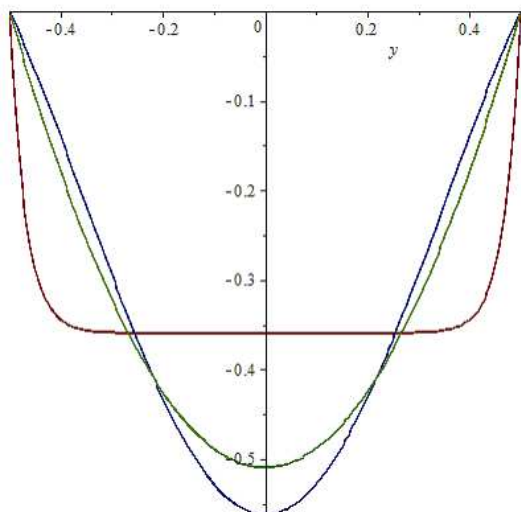


Рис. 5:  $T_1 = 10, T_2 = 10, T_3 = 5000$ .

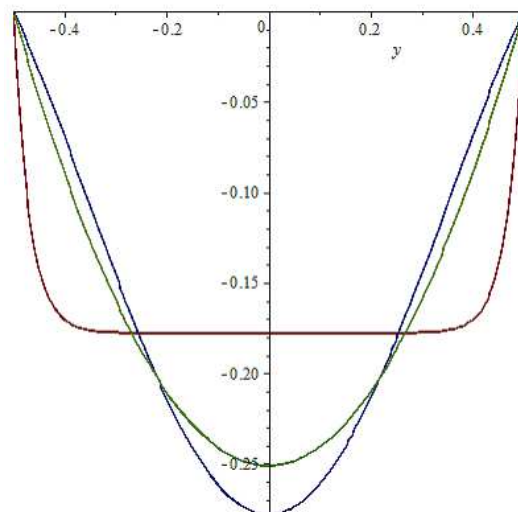


Рис. 6:  $T_1 = 10, T_2 = 10, T_3 = 10^4$ .

краевая задача (1) примет вид:

$$\begin{aligned} -T_1 \frac{d^2 f_1}{dx^2} + g\rho_1 f_1 &= -g\rho_1 h_1 + C_1, \\ -T_2 \frac{d^2 f_2}{dx^2} + g\Delta\rho f_2 &= C_2 - C_1, \\ \frac{d^4 f_3}{dx^4} - k_3^4 f_3 &= -k_3^4 h_2 - \frac{C_2}{D_3}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$f_i|_{x=\pm a} = 0, \quad \left. \frac{df_i}{dx} \right|_{x=\pm a} = 0 \quad (i = \overline{1,3}) \quad (7)$$

$$\int_{-a}^a f_1 dx = \int_{-a}^a f_2 dx = \int_{-a}^a f_3 dx. \quad (8)$$

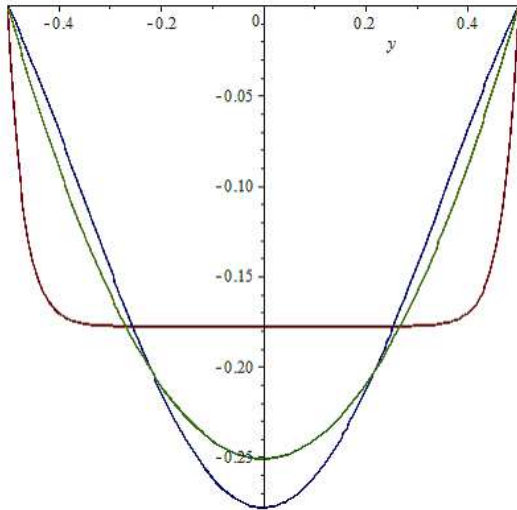


Рис. 7:  $T_1 = 10, T_2 = 10, T_3 = 10^5$ .

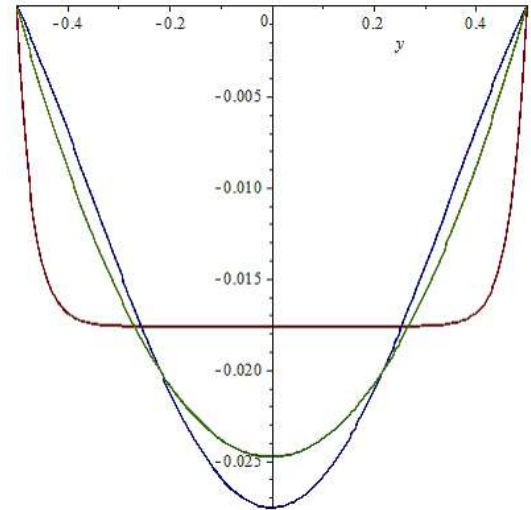


Рис. 8:  $T_1 = 10, T_2 = 10, T_3 = 10^6$ .

Введем безразмерные переменные

$$\tilde{C}_i = \frac{C_i}{g\rho_i} \quad (i = 1, 2), \quad \rho_{21} = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{a}, \quad \mu_i = \sqrt{\frac{g\rho_i}{T_i}}a \quad (i = \overline{1, 2}), \quad k_3 = \sqrt[4]{\frac{g\rho_2}{D_3}}a.$$

В дальнейшем знак тильды также будем опускать.

Решение системы дифференциальных уравнений (6) с граничными условиями (7) имеет вид

$$\begin{aligned} f_1 &= (C_1 - h_1) \left( 1 - \frac{\cosh \mu_1 x}{\cosh \mu_1} \right), \quad f_2 = \frac{C_1 - \rho_{21} C_2}{1 - \rho_{21}} \left( 1 - \frac{\cos \mu_2 x}{\cos \mu_2} \right), \\ f_3 &= (C_2 + h_2) \left( 1 - \frac{\cosh k_3 x \sin k_3 + \cos k_3 x \sinh k_3}{\cosh k_3 \sin k_3 + \cos k_3 \sinh k_3} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Подставив (9) в (8), найдем неизвестные константы  $C_1$  и  $C_2$ . Введу громоздкости этих выражений приводить их не будем.

На рис. 9–14 представлены графики прогибов  $f_i(x)$  ( $i = \overline{1, 3}$ ), вычисленные при  $\rho_1 = 980, \rho_2 = 1000, h_1 = h_2 = 1, a = 0.5, g = 10$ .

Из приведенных рис. 9–14 следует, что при существенном увеличении натяжения мембран или жесткости пластины прогибы всех двух мембран и пластины уменьшаются. Из рис. 9–10 видно, что при увеличении натяжения мембран в 10 раз прогиб верхней мембраны возрос примерно в 1,1 раза, прогиб второй мембраны почти не изменился, а прогиб пластины уменьшился. При дальнейшем увеличении натяжения мембран в 10 раз прогибы мембраны уменьшились примерно в 1,3 раза, а прогиб пластины уменьшился примерно в 1,25 раз (см. рис. 11). При увеличении жесткости пластины в 2, 3, 4 раза прогибы мембран и пластины уменьшаются примерно в 2, 3, 4 раза (см. рис. 9, 12–14).

Как было отмечено в начале данной статьи, из-за статического прогиба пластин, необходимо указать ограничения на параметры механической системы при которых не нарушается линейная постановка задачи. На примере двух мембран ( $D_1 = D_2 = 0, \rho_2 = 0$ ) найдем эти ограничения.

Случай двух мембран ( $D_1 = D_2 = 0, \rho_2 = 0$ ). В этом случае краевая задача (1)

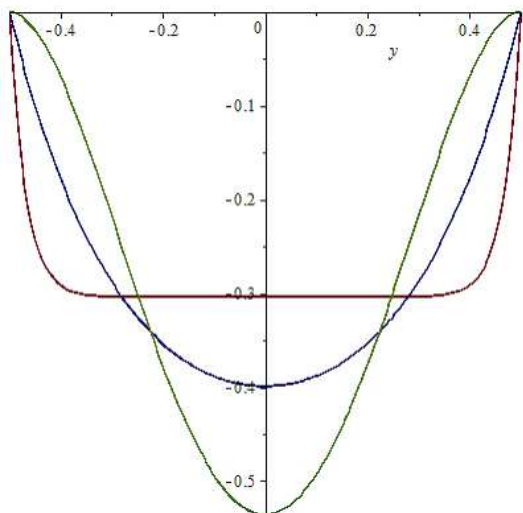


Рис. 9:  $T_1 = 10, T_2 = 10, D_3 = 100.$

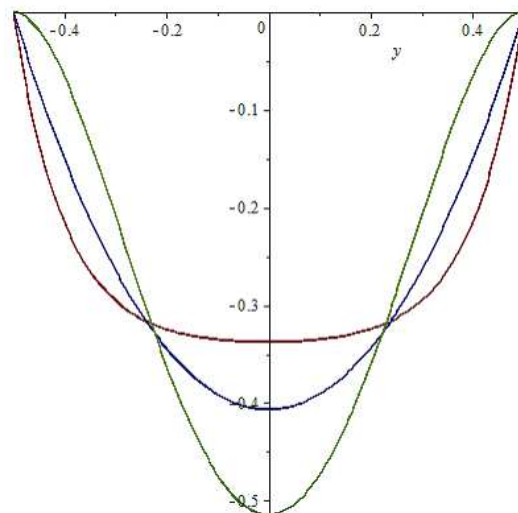


Рис. 10:  $T_1 = 100, T_2 = 100, D_3 = 100.$

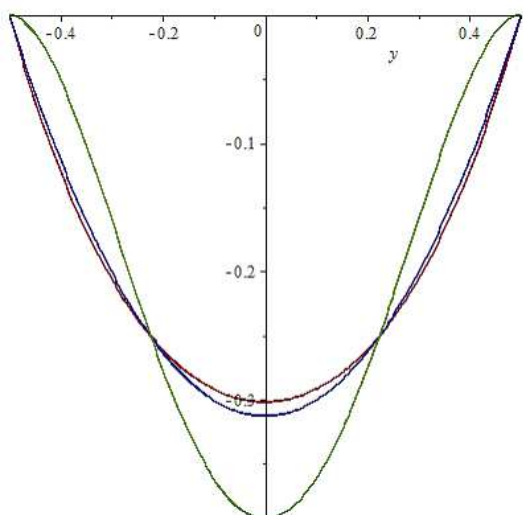


Рис. 11:  $T_1 = 10^3, T_2 = 10^3, D_3 = 100.$

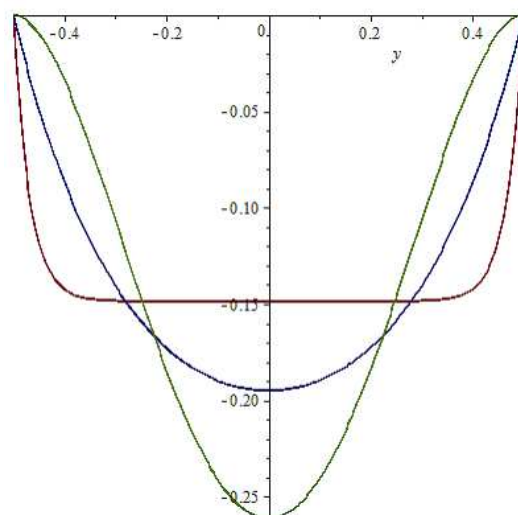


Рис. 12:  $T_1 = 10, T_2 = 10, D_3 = 200.$

запишется так

$$\begin{aligned} T_1 \frac{d^2 f_1}{dx^2} + g\rho f_1 &= C, \\ -T_2 \frac{d^2 f_2}{dx^2} - g\rho f_2 &= -C - g\rho h, \end{aligned} \quad (10)$$

$$f_i|_{x=\pm a} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (11)$$

$$\int_{-a}^a f_1 dx = \int_{-a}^a f_2 dx. \quad (12)$$

Решение которой имеет вид:

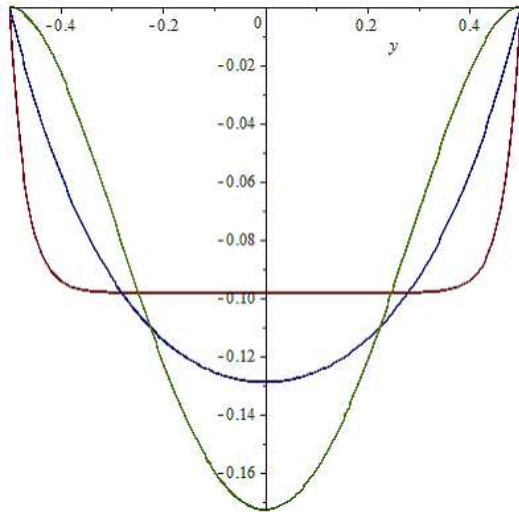


Рис. 13:  $T_1 = 10, T_2 = 10, D_3 = 300$ .

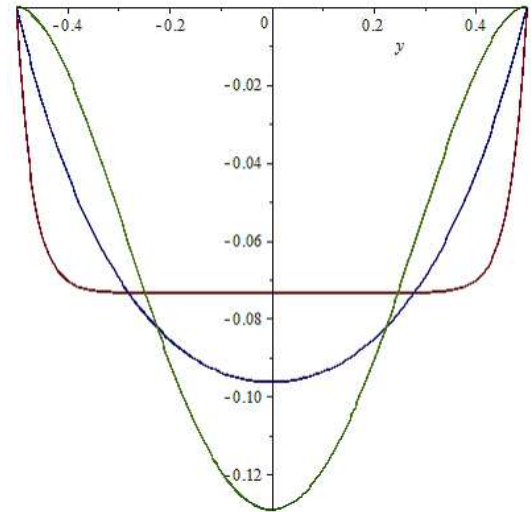


Рис. 14:  $T_1 = 10, T_2 = 10, D_3 = 400$ .

$$f_1 = C \left( 1 - \frac{\cosh \mu_1 x}{\cosh \mu_1} \right), f_2 = (C + h) \left( 1 - \frac{\cos \mu_2 x}{\cos \mu_2} \right), \quad (13)$$

$$C = h \frac{\mu_1 \cosh \mu_1 (\mu_2 \cos \mu_2 - \sin \mu_2)}{\mu_1 \cosh \mu_1 \sin \mu_2 - \mu_2 \sinh \mu_1 \cos \mu_2}.$$

На рис. 15–16 представлены графики прогибов  $f_i(x)$  ( $i = \overline{1,2}$ ), вычисленные при  $h = 1$ . Верхний график это график функции  $f_1(x)$ .

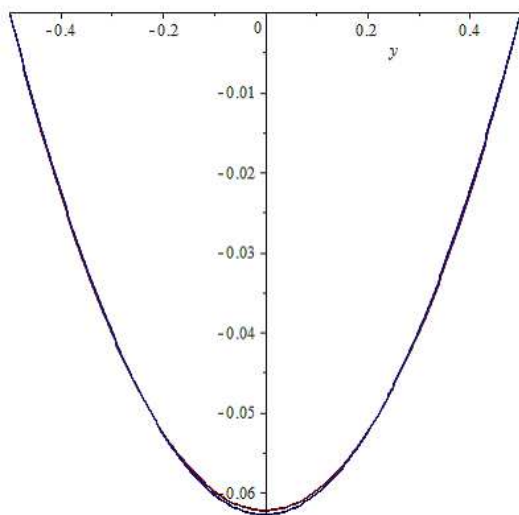


Рис. 15:  $\mu_1 = 1, \mu_2 = 1$ .

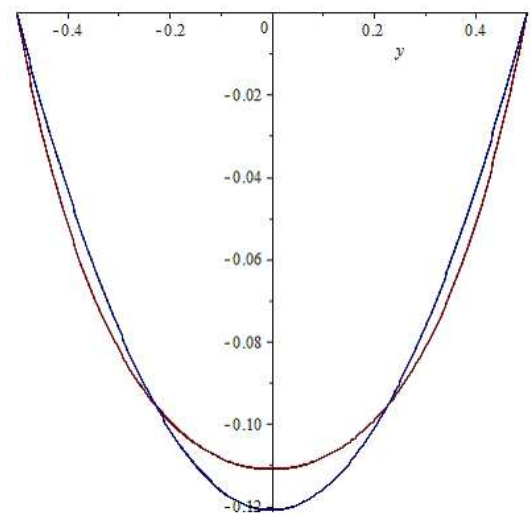


Рис. 16:  $\mu_1 = 5, \mu_2 = 1$ .

В табл. 1–4 для  $\mu_i = 1, 3, 5, 7$  ( $i = \overline{1,2}$ ) и  $h = 1, 2$  приведены максимальные отклонения  $|f_i(0)|$ . Табл. 1–2 соответствует  $h = 2$ , а табл. 3–4 –  $h = 1$ . В табл. 1 верхняя строка соответствует  $\mu_1 = 1$ , нижняя –  $\mu_1 = 3$ , а в табл. 2 верхняя строка соответствует  $\mu_1 = 5$ , нижняя –  $\mu_1 = 7$ . В табл. 3 верхняя строка соответствует  $\mu_1 = 1$ , нижняя –  $\mu_1 = 3$ , а в табл. 4 верхняя строка соответствует  $\mu_1 = 5$ , нижняя –  $\mu_1 = 7$ .

**Табл. 1:**  $h = 2, \mu_1 = 1, \mu_1 = 3.$ 

$\mu_2$	1	3	5	7
$ f_1(0) $	0.1245 0.2177	0.2243 1.098	0.2349 1.655	0.2473 2.068
$ f_2(0) $	0.1255 0.2262	0.2348 1.184	0.2785 1.976	0.3834 3.304

**Табл. 2:**  $h = 2, \mu_1 = 5, \mu_1 = 7.$ 

$\mu_2$	1	3	5	7
$ f_1(0) $	0.2121 0.2155	1.561 1.732	3.135 4.180	5.197 9.419
$ f_2(0) $	0.2420 0.2470	1.766 2.060	3.925 5.504	8.7049 16.59

**Табл. 3:**  $h = 1, \mu_1 = 1, \mu_1 = 3.$ 

$\mu_2$	1	3	5	7
$ f_1(0) $	0.062 0.1088	0.1122 0.5490	0.1202 0.8276	0.1237 1.034
$ f_2(0) $	0.063 0.1131	0.1174 0.5922	0.1393 0.9882	0.1917 1.652

**Табл. 4:**  $h = 1, \mu_1 = 5, \mu_1 = 7.$ 

$\mu_2$	1	3	5	7
$ f_1(0) $	0.1110 0.1078	0.7807 0.8660	1.568 2.090	2.598 4.710
$ f_2(0) $	0.1210 0.1235	0.8830 1.030	1.963 2.752	4.352 8.296

Из табл. 1–4 следует, что для выполнения условия линейности прогибов  $|f_i(0)| < 0.25$  при  $h = 2$  достаточно потребовать, чтобы  $\mu_1 \leq 7$  и  $\mu_2 \leq 1$ , а при  $h = 1$  –  $\mu_1 \leq 7$  и  $\mu_2 < 3$ .



## Выводы

В работе исследовано влияние упругих и массовых характеристик пластин, плотностей и глубин заполнения жидкостей на статические прогибы пластин и мембран. На примере двух мембран (случай отсутствия нижней жидкости) проведены исследования безразмерных параметров при которых прогибы мембран остаются в рамках линейной теории.

Исследования проведены в рамках программы фундаментальных исследований Министерства образования и науки Украины (проект № 0116U002522) и при грантовой поддержке ДФФД (проект № Ф71/47-2017).

## References

- [1] Ильгамов М.А., Сахабутдинов Ж.М. Об устойчивости упругой пластины между жидкостями разной плотности // Изб. проблемы прикл. механики. Сб. статей к шестидесятилетию акад. Н. Челомея. — М., 1974. — С. 341–346.
- [2] *Ильгамов М.А.* Введение в нелинейную гидроупругость. — М.: Наука, 1991. — 200 с.
- [3] Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Свободные колебания двухслойной жидкости, разделенной упругой пластинкой в прямоугольном канале // Теор. и прикл. механика. — 2002. — Вып. 36. — С. 170–176.
- [4] Троценко В.А. Свободные колебания жидкости в прямоугольном канале с упругой мембраной на свободной поверхности // Прикл. механика. — 1995. — Т. 31. № 8 — С. 74–80.
- [5] Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на свободной и внутренней поверхностях // Прикл. гідромеханіка. — 2003. — Т. 5(77), № 3. — С. 48–54.
- [6] Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на "свободной" и внутренней поверхностях // Акустичний вісник. — 2003. — Т. 6. № 4 — С. 44–52.
- [7] Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Свободные колебания упругих мембран и двухслойной жидкости в прямоугольном канале с упругим дном // Прикл. гідромеханіка. — 2008. — № 1 — С. 33–38.
- [8] Кононов Ю.Н., Лимарь А.А. Вісн. Запорізького національного ун-ту. Сер. Фіз.-мат. наук. // Вісн. Запорізького національного ун-ту. Сер. Фіз.-мат. наук. — 2017. — № 1 — С. 190–204.
- [9] *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуи Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.
- [10] Андронов А.В. О малых колебаниях идеальной жидкости в сосуде с упругими днищами // Симфер. ун-т. — Симферополь, 1983. — 26с. — Рус. — Деп. в УкрНИИТИ 30.12.83, № 1478.

Лумар О.О.

*applicant of the Department of Applied Mathematics and Computer Technologies  
of Vasyl' Stus Donetsk National University,  
Nikolaev National Agrarian University*

## STATIC DEFLECTION OF ELASTIC FOUNDATIONS OF HARD RECTANGULAR CHANNEL WITH LIQUID

### SUMMARY

In a linear formulation, the functions of static deflections of elastic bases in the form of fixed rectangular plates in a rigid rectangular channel with a two-layer ideal incompressible fluid separated by an elastic plate are obtained. The cases of plate degeneracy into membranes and the absence of one of the liquids are considered. Investigations of static deflections of plates from elastic and mass characteristics, densities and filling depths of liquids are conducted. On the basis of numerous studies, areas of change of dimensionless parameters are determined. With these parameters, the static problem is described within the framework of a linear theory. This is a prerequisite for solving a dynamic task.

**Key words:** *hydrostatic, static flat problem, rectangular plates, ideal fluid.*

Лимар О.О.

*здобувач кафедри прикладної математики і комп'ютерних технологій  
Донецького національного університету імені Василя Стуса,  
Миколаївський національний аграрний університет*

## СТАТИЧНИЙ ПРОГІН ПРУЖНИХ ПІДСТАВ ЖОРСТКОГО ПРЯМОКУТНОГО КАНАЛУ З РІДИНОЮ

### РЕЗЮМЕ

У лінійній постановці отримані функції статичних прогинів пружних підстав у вигляді закріплених прямокутних пластин в жорсткому прямокутному каналі з двошаровою ідеальною нестисливою рідиною, розділеною пружною пластиною. Розглянуто випадки виродження пластин в мембрани і відсутності однієї з рідин. Проведені дослідження статичних прогинів пластин від пружних і масових характеристик, щільності і глибин заповнення рідин. На основі проведених численних досліджень визначені області зміни безрозмірних параметрів, при яких статична задача описується в рамках лінійної теорії, що є необхідною умовою для вирішення динамічної задачі.

**Ключові слова:** *гідропружність, статична плоска задача, прямокутні пластини, ідеальна рідина.*