УДК 512.56(2-8),519.766.24

Галина Крайнічук

старший викладач кафедри математичного аналізу і диференціальних рівнянь, Донецький національний університет імені Василя Стуса

КЛАСИФІКАЦІЯ БІНАРНИХ КВАЗІГРУПОВИХ ФУНКЦІЙНИХ РІВНЯНЬ І ТОТОЖНОСТЕЙ ДОВЖИНИ ТРИ

У цій статті класифіковано узагальнені функційні рівняння довжини три, в результаті отримано 4 різних класи з точністю до парастрофно-первинної рівносильності. З використанням методу парастрофної симетрії класифіковано узагальнені парастрофні тотожності з точністю до рівносильності, які визначають парастрофні многовиди, в результаті отримано 20 різних многовидів, що є розв'язками відповідних функційних рівнянь.

Ключові слова: *оборотна операція (квазігрупа), парастроф, лупа, ізотоп, тотожність, функційне рівняння, рівносильність, парастрофна симетрія.*

Вступ

Початок розвитку функційних рівнянь сягає 1747 року з двох праць Даламбера. В основному функційні рівняння розв'язувались над числовими функціями [1, 16]. В другій половині 20-го століття зріс інтерес до шифрування та дешифрування інформації, а це, в свою чергу, спричинило вивчення функційних рівнянь над функціями, що визначені на довільних множинах, в тому числі на скінчених. Вперше таке рівняння було розв'язане В.Д.Білоусовим в 1958 році [2, 3]. А саме, він розв'язав рівняння загальної асоціативності над оборотними, тобто квазігруповими функціями. До середини 90-х років минулого століття опубліковано десятки праць, в яких розв'язуються функційні рівняння як на оборотних так і на необоротних функціях. Постала проблема класифікації функційних рівнянь таким чином, щоб в один клас віднести рівняння, які мають просту залежність між множинами їх розв'язків.

Майже одночасно з різницею в декілька років було запропоновано два підходи до проблеми класифікації функційних рівнянь.

Перший метод, це метод графів А.Крапєжа і Крстіча [13, 14, 15]. Згідно їхньому підходу між функційними рівняннями і графами встановлювалася певна відповідність і в один клас попадали точно ті рівняння, яким відповідали ізоморфні графи. Проте цей метод годиться лише для квадратичних рівнянь. Квадратичними називають рівняння, в яких кожна предметна змінна має точно дві появи.

Другий метод це метод парастрофної симетрії Сохацького Ф.М. [12], згідно якому вводиться ряд перетворень функційних рівнянь, що грунтуються на первинних тотожностях оборотних функцій. Два рівняння називаються парастрофно-первинно рівносильними, якщо від одного до іншого можна перейти за скінченну кількість зазначених перетворень. Цей метод розвивався, удосконалювався різними дослідниками, зокрема й автором статті застосовується до класифікації неквадратичних функційних рівнянь і тотожностей.

У цій статті досліджуються функційні рівняння та тотожності довжини три на множині оборотних двомісних функціях; встановлюються взаємні зв'язки між розв'язками функційних рівнянь одного класу парастрофної симетрії та класифікації квазігрупових функційних рівнянь і тотожностей довжини три з точністю до парастрофно-первинної рівносильності, враховуючи основний закон парастрофної симетрії. Довжиною функційного рівняння називаємо точну кількість функційних змінних у рівнянні.

Основними класами квазігруп, які розглядаються, є многовиди, тобто класи квазігруп, що визначаються тотожностями. Ефективним методом аналізу тотожностей є розв'язання відповідного функційного рівняння, тобто рівняння, яке отримуємо з даної тотожності заміною кожної появи функційного символу її функційною змінною відповідної арності. Тому вивчення функційних рівнянь над квазігрупами можна розглядати як синтезоване вивчення систем тотожностей в квазігрупах.

Білоусов В.Д. [6] у своїй праці підняв питання класифікації мінімальних тотожностей на квазігрупах. Він розглядав тотожності, що гарантують ортогональність парастрофів квазігрупи, в якій виконується така тотожність. Інші тотожності, які відкидав Білоусов, не завжди мають властивість ортогональності, проте вони досить часто зустрічаються і використовуються для застосування в різних галузях. Ідею пошуку парастрофних тотожностей запропонував Сад [20], його методом скористався Стейн [23] і отримав деякі парастрофні тотожності для одного пучка многовидів. Білоусов систематизував відомі результати та методи їх дослідження в праці [2].

Питання, яке поставив Білоусов, було уточнене Сохацьким Ф.М. [2]. Як наслідок, Р.Коваль [11] розглядала узагальнені функційні рівняння на квазігрупах. Зокрема, вона у своїй дисертації виписала, як приклад, неквадратичні функційні рівняння, що мають три появи однієї предметної змінної та дві появи іншої предметної змінної. Всього таких класів виявилося три. Перший клас не має квадратів, тобто підтермів виду $F(x;x)$. Парастрофні тотожності з цього класу класифікував Білоусов на квазігрупах. В своїй теоремі він отримав три тотожності Стейна (I, II та III закони Стейна), дві тотожності Шредера та ще дві нових тотожності, які сьогодні ми називаємо законами Білоусова-Бенета. Над цим питання працював Іванс [10], який довів, що таких класів 14. Паралельно із Білоусовим, результати Іванса спростовує Бенет [9] і встановлює, що їх 8. Проте, всього їх виявилося точно сім, як доведено у В. Білоусова [6]. Множини парастрофів квазігруп виписала для цього класу Попович Т. [18] з Білявською Г. [8].

Метою даної статті є дослідження всіх класів узагальнених бінарних квазігрупових функційних рівнянь довжини три з точністю до парастрофно-первинної рівносильності та описання тотожностей, які визначають парастрофні квазігрупи з точністю до парастрофної рівносильності та рівносильності.

Завдання даного дослідження: класифікувати узагальнені функційні рівняння довжини три та визначити всі парастрофні тотожності, цим самим встановивши кількість різних парастрофних многовидів квазігруп.

1. Основні означення та результати

В роботі розглядаються операції, що визначені на одній і тій же множині, яку називатимемо *базовою, (носієм)* і позначатимемо через Q. Операції вивчаємо на множині двомісних функцій, тобто бінарних операцій. Функції (операції) позначатимемо префіксними та інфіксними символами відповідно, тобто $f(x;y)$ та $x \cdot y$ ($x \overset{\sigma}{\cdot} y$). Тотожне інфіксне позначення між двома символами змінних $x \cdot y$ будемо опускати, тобто запис матиме вигляд xy.

Операція f називається *лівооборотною*, якщо довільний її правий зсув є підстановкою базової множини. Інакше кажучи, якщо рівняння $f(x;a) = b$ має єдиний розв'язок для всіх a, b із Q. Розв'язок цього рівняння позначають через ${}^{\ell}f(b;a)$. Очевидно, що ${}^{\ell}f$ є бінарною операцією, яку називають лівим діленням (інколи спряженням) операції f. Так само визначається праве ділення ${}^{r}f$ операції f. Інакше ці операції можна визначити тотожностями

$$f({}^{\ell}f(x;y);y)=x, \qquad {}^{\ell}f(f(x;y);y)=x,$$
$$f(x;{}^{r}f(x;y))=y, \qquad {}^{r}f(x;f(x;y))=y. \tag{1}$$

Інфіксний запис цих тотожностей такий

$$(x\overset{\ell}{\cdot}y)\cdot y=x, \quad xy\overset{\ell}{\cdot}y=x, \quad x\cdot(x\overset{r}{\cdot}y)=y, \quad x\overset{r}{\cdot}xy=y. \tag{2}$$

Функція f називається *оборотною* або *квазігруповою*, якщо вона є і лівооборотною і правооборотною. При цьому тотожності (1) називаються *визначальними* або *первинними*, а алгебра $(Q;f,{}^{\ell}f,{}^{r}f)$ називається *квазігрупою*.

Парастрофи операцій. Розглядаючи обернені до обернених і т.д. ми отримуємо послідовність операцій, які називають *парастрофами* операції $(\cdot)$. Всі їх можна визначити спільним співввідношенням. А саме, операція $(\overset{\sigma}{\cdot})$ називається σ-парастрофом операції $(\cdot)$, яку називатимемо *головною*, якщо вона визначається таким співвідношенням:

$$x_{1\sigma}\overset{\sigma}{\cdot}x_{2\sigma}=x_{3\sigma} :\Leftrightarrow\ x_1\cdot x_2=x_3 \tag{3}$$

для будь-якого $\sigma\in S_3:=\{\iota,s,\ell,r,s\ell,sr\}$, де S_3 — симетрична група третього порядку та $s:=(12)$, $\ell:=(13)$, $r:=(23)$. Легко бачити, що s-, $s\ell$- та sr-парастрофи є дуальними операціями відповідно до ι-, ℓ-, та r-парастрофів, тобто виконуються співвідношення

$$x\overset{s}{\cdot}y:=y\cdot x, \qquad x\overset{s\ell}{\cdot}y:=y\overset{\ell}{\cdot}x, \qquad x\overset{sr}{\cdot}y:=y\overset{r}{\cdot}x \tag{4}$$

Ці співвідношення встановлюють взаємнооднозначну відповідність між тотожностями сигнатури $(\cdot,\overset{\ell}{\cdot},\overset{r}{\cdot})$ і тотожностями сигнатури $(\cdot,\overset{\ell}{\cdot},\overset{r}{\cdot},\overset{s}{\cdot},\overset{s\ell}{\cdot},\overset{sr}{\cdot})$ з точністю до рівносильності тотожностей. Тому для зручності ми розглядаємо квазігрупи, як алгебри з парастрофно замкненою сигнатурою і називатимемо їх *повносигнатурні квазігрупи*.

Легко довести, що парастрофи квазігруп задовольняють співвідношення

$$^{\sigma}\!\left(\overset{\tau}{\cdot}\right)=\left(\overset{\sigma\tau}{\cdot}\right) \tag{5}$$

для всіх $\sigma,\tau\in S_3$. З цієї рівності випливає, що відображення $(\sigma;(\cdot))\mapsto(\overset{\sigma}{\cdot})$ є дією групи S_3 на множині всіх квазігрупових операцій множини Q. Стабілізатор $\mathrm{Ps}(\cdot)$ цієї дії називається *групою парастрофних симетрій* операції $(\cdot)$ [12], тому $6/|\mathrm{Ps}(\cdot)|$ є кількістю різних парастрофів операції $(\cdot)$. Оскільки $\mathrm{Ps}(\cdot)$ є підгрупою симетричної групи S_3, то можна виділити шість класів квазігруп (п'ять з яких є многовидами), які покривають многовид всіх квазігруп. Такі класи квазігруп визначаються за допомогою їх груп симетрій. А саме, квазігрупа називається:

- *асиметричною*, якщо $\mathrm{Ps}(\cdot)=\{\iota\}$. В асиметричних квазігрупах всі парастрофи попарно різні;
- *комутативною*, якщо $\mathrm{Ps}(\cdot)\supseteq\{\iota,s\}$. Многовид всіх комутативних квазігруп описується тотожністю $xy=yx$. Кожна квазігрупа цього многовиду має не більше трьох різних парастрофів;

- *ліво-симетричною*, якщо $\mathrm{Ps}(\cdot) \supseteq \{\iota, r\}$. Многовид всіх ліво-симетричних квазігруп описується тотожністю $x \cdot xy = y$. Кожна квазігрупа цього многовиду має не більше трьох різних парастрофів;

- *право-симетричною*, якщо $\mathrm{Ps}(\cdot) \supseteq \{\iota, \ell\}$. Многовид всіх право-симетричних квазігруп описується тотожністю $xy \cdot y = x$. Кожна квазігрупа цього многовиду має не більше трьох різних парастрофів;

- *напів-симетричною*, якщо $\mathrm{Ps}(\cdot) \supseteq A_3$. Многовид всіх напів-симетричних квазігруп описується тотожністю $x \cdot yx = y$. Кожна квазігрупа цього многовиду має не більше двох різних парастрофів;

- *тотально-симетричною*, якщо $\mathrm{Ps}(\cdot) = S_3$. Многовид всіх тотально симетричних квазігруп описується тотожностями $xy = yx$ and $xy \cdot y = x$. Всі парастрофи кожної квазігрупи даного многовиду збігаються.

Парастрофи класів квазігруп. Аналогічно вводиться парастрофна симетрія для класів квазігруп [12]. Клас ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$, який складається з усіх σ-парастрофів квазігруп із класу $\mathfrak{A}$ називається *σ-парастрофом класу* $\mathfrak{A}$. Із (5) випливає співвідношення

$$ {}^{\sigma}\Big({}^{\tau}\mathfrak{A}\Big) = {}^{\sigma\tau}\mathfrak{A}, \tag{6} $$

яке означає, що S_3 діє на довільній множині всіх попарно парастрофних класів квазігруп. Стабілізатор цієї дії називається групою парастрофних симетрій класу $\mathfrak{A}$ і позначається $\mathrm{Ps}(\mathfrak{A})$, а орбіта називається пучком класу $\mathfrak{A}$ і позначається $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$. Із загальних властивостей дії групи на множині випливає таке твердження:

Твердження 1. *[12] Група парастрофних симетрій довільного класу квазігруп є підгрупою симетричної групи S_3, групи парастрофних симетрій парастрофних класів спряжені і для довільного класу квазігруп $\mathfrak{A}$ виконується залежність*

$$ |\mathrm{Ps}(\mathfrak{A})| \cdot |\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})| = 6. \tag{7} $$

S_3 має шість підгруп, з яких три попарно спряжені, тому з даного твердження випливає, що всі класи квазігруп можна поділити на чотири типи:
1) *тотально симетричний* — це клас, група симетрій якого збігається з S_3, тому всі парастрофні до нього класи дорівнюють йому, тобто породжений ним пучок є одноелементним;
2) *напівсиметричний* — це клас квазігруп $\mathfrak{A}$, його групою симетрій є знакозмінна група A_3, яка триелементна і тому породжений ним пучок має два класи: $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}) = \{\mathfrak{A}, {}^{s}\mathfrak{A}\}$;
3) *односторонньо симетричний* — це клас квазігруп, який породжує триелементний пучок $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}) = \{\mathfrak{A}, {}^{\ell}\mathfrak{A}, {}^{r}\mathfrak{A}\}$ класів квазігруп, групи парастрофних симетрій, яких є $\{\iota, s\}$, $\{\iota, \ell\}$ та $\{\iota, r\}$ (не обов'язково відповідно);
4) *асиметричний* — це клас квазігруп, який породжує шестиелементний пучок, тобто всі парастрофи різні, і тому група симетрій кожного з них одноелементна.

Пучком многовидів називається множина всіх попарно парастрофних між собою многовидів.

2. Основний закон парастрофної симетрій

Нехай P довільне твердження в класі квазігруп $\mathfrak{A}$. Твердження ${}^{\sigma}P$ називаємо σ-парастрофом твердження P, якщо його можна отримати з P заміною кожного парастрофа $(\overset{\tau}{\cdot})$ на $(\overset{\tau\sigma^{-1}}{\cdot})$; де ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$ позначає клас всіх σ-парастрофів квазігруп з класу $\mathfrak{A}$. Основний закон симетрії формулюється в такій теоремі:

Теорема 1. *[12] Нехай $\mathfrak{A}$ – клас квазігруп. Твердження P істинне в $\mathfrak{A}$ тоді і тільки тоді, коли ${}^{\sigma}P$ істинне в ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$.*

З основного закону парастрофної симетрії випливає ряд наслідків.

Наслідок 1. *[12] Нехай P істинне в класі квазігруп $\mathfrak{A}$, тоді для всіх $\sigma \in \mathrm{Ps}(\mathfrak{A})$ в цьому ж класі буде істине твердження ${}^{\sigma}P$.*

Наслідок 2. *[12] В тотально симетричному класі квазігруп разом з довільним твердженням істинний довільний парастроф цього твердження.*

Прикладами тотально симетричних класів є многовид дистрибутивних квазігруп, многовид всіх квазігруп, многовид ідемпотентних квазігруп, многовид уніпотентних луп тощо. Серед довільних тверджень найпоширенішим є тотожність, тому для тотожності маємо такий наслідок.

Наслідок 3. *[12] Тотожність $\omega = \upsilon$ визначає многовид квазігруп $\mathfrak{A}$, тоді і тільки тоді, коли σ-парастроф ${}^{\sigma}(\omega = \upsilon)$ цієї тотожності визначає многовид ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$, де $\sigma \in S_3$.*

Зауважимо, що тотожність ${}^{\sigma}(\omega = \upsilon)$ отримується з тотожності $\omega = \upsilon$ заміною довільного парастрофа $(\overset{\tau}{\cdot})$ на $(\overset{\tau\sigma^{-1}}{\cdot})$. Наприклад, $s\ell$-парастрофом тотожності $xy \cdot y = x$ є тотожність $(x \overset{sr}{\cdot} y) \overset{sr}{\cdot} y = x$, оскільки $(s\ell)^{-1} = sr$. Отриману тотожність запишемо у вигляді $(x \; {}^{s}(\overset{r}{\cdot}) \; y) \; {}^{s}(\overset{r}{\cdot}) \; y = x$. Але з означення s-парастрофа випливає, що $t_1 \overset{s}{\cdot} t_2 = t_2 \cdot t_1$ для довільних термів t_1, t_2. Тому маємо рівносильну їй тотожність $y \overset{r}{\cdot} (y \overset{r}{\cdot} x) = x$. Скориставшись означенням r-парастрофа, маємо $y \cdot x = y \overset{r}{\cdot} x$. Знову застосуємо означення r-парастрофа: $x = y \cdot yx$. Отже, клас ${}^{s\ell}\mathfrak{A}$ є многовидом, який визначається тотожністю $y \cdot yx = x$.

Зауважимо, що має місце співвідношення

Наслідок 4. *Тотожність ${}^{\tau}({}^{\sigma}(\omega = \upsilon))$ рівносильна тотожності ${}^{\tau\sigma}(\omega = \upsilon)$, де $\sigma, \tau \in S_3$.*

Клас усіх квазігруп покритий шістьма класами: класом всіх асиметричних квазігруп і п'ятьма многовидами квазігруп (комутативних, ліво-симетричних, право-симетричних, напів-симетричних і тотально симетричних). Кожен з цих класів характеризується групою симетрії його квазігруп.

Будемо говорити, що *квазігрупа має властивість симетрії*, якщо вона задовольняє одній з таких властивостей симетрії: комутативність, ліву симетрію, праву симетрію, напів-симетрію або тотальну симетрію.

Якщо всі парастрофи оборотної функції збігаються, то функція називається *TS-квазігрупою.* Двомісна оборотна функція називається *ідемпотентною*, якщо для довільного елемента x виконується $f(x; x) = x$. Ідемпотентні TS-квазігрупи називають *квазігрупами Штейнера. Лупою* називають квазігрупу з одиничним елементом. *Лупа Штейнера* – це TS-квазігрупа з одиницею, парастрофи якої рівні між собою.

3. Означення функційного рівняння та тотожності

В статті досліджуються тотожності та функційні рівняння. Між цими двома поняттями є досить сильний зв'язок, аналогічно тому як між бінарними відношеннями та графами. Наприклад, бінарні відношення можна подати як графи і в деякій мірі навпаки: деякі види графів можна розглядати як бінарні відношення. Так само між функційними рівняннями та тотожностями є досить великий перетин.

Під поняттям тотожність насправді розуміють в одному випадку вислів мови першого порядку, в іншшому випадку – це пердикат мови другого порядку, а саме

1. *вислів*, наприклад, в множині дійсних чисел $(\mathbb{R};\cdot)$, істиною є така тотожність

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ \ (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z); \tag{8}$$

2. *предикат*, наприклад, клас квазігруп визначається такою тотожністю

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ \ (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z), \tag{9}$$

тобто тотожність асоціативності для множення дійсних чисел – це вислів, а у твердженні "асоціативність визначає клас напівгруп", теж в літературі вживається термін – тотожність, хоча насправді тут – це предикат. У першому випадку (1) символ $(\cdot)$ – то є функційна стала, а в другому випадку (2), символ $(\cdot)$ – то функційна змінна. Саме те що в другому випадку (2), цю тотожність називатимемо функційним рівнянням, а клас всіх напівгруп є класом всіх розв'язків функційного рівняння асоціативності. Слід розрізняти ці два поняття, тому збережемо назву "*тотожність*" лише для (8), а (1) називатимемо "*функційне рівняння*". Щоб дати точне означення, користуємося означенням поняття "*терм*", яке сформульоване в статті Ф. Сохацького [12].

Універсальна рівність двох термів

$$(\forall F_1)(\forall F_2)\dots(\forall F_k)(\forall x_1)(\forall x_2)\dots(\forall x_n)(T_1 = T_2) \tag{10}$$

називається *функційним рівнянням на* Q, якщо вона має принаймні одну вільну функційну змінну, інакше вона є висловом і називається *тотожністю*, якщо цей вислів істиний та *протиріччям*, якщо цей вислів хибний.

Наприклад, нехай F_1 — унарна і F_3 бінарна функційні змінні, тоді

$$(\forall F_1)(\forall F_3)(\forall x)(\forall y)(\forall z)\Big(\big(F_1(x)+\sin x\big)+F_3(x,y)=F_1(x)+\big(\cos x+F_3(x,y)\big)\Big)$$

є тотожністю на множині дійсних чисел. В цій формулі $(+)$ є бінарною, а $\cos x$ та $\sin x$ унарними функційними сталими.

Функційне рівняння називається *чистим*, якщо воно не має ні функційних, ні предметних сталих.

Значення лексикографічної послідовності всіх вільних функційних змінних даного функційного рівняння називається його *розв'язком*, якщо рівняння стає тотожністю після підстановки компонентів розв'язку замість функційних змінних.

Чисте функційне рівняння можна розглядати на кожному носієві, причому на кожному носієві воно має свою множину розв'язків. Отже, розв'язком чистого функційного рівняння є пара: носій і послідовність функцій, що визначена на носієві. Тому всі розв'язки функційного рівняння утворюють алгебру. Клас називається многовидом, якщо він описується тотожностями, тобто в цій термінології — многовид є розв'язком чистого функційного рівняння.

Формула (10) називається *універсальною квазігруповою рівністю*, якщо і функційні змінні, і функційні сталі є квазігруповими операціями.

Первинні квазігрупові гіпер-тотожності — це чисті квазігрупові тотожності (чисті функційні рівняння), які випливають із означення оборотних операцій та їх парастрофів. Для бінарного випадку ці тотожності такі:

$$\begin{aligned}
&{}^{\sigma}({}^{\tau}F) = {}^{\sigma\tau}F, && {}^{s}F(x,y) = F(y,x),\\
&{}^{\ell}F(F(x,y),y) = x, && F({}^{\ell}F(x,y),y) = x,\\
&{}^{r}F(x,F(x,y)) = y, && F(x,{}^{r}F(x,y)) = y,\\
&{}^{s\ell}F(x,F(y,x)) = y, && F({}^{s\ell}F(x,y),x) = y,\\
&{}^{sr}F(F(y,x),y) = x, && F(y,{}^{sr}F(x,y)) = x.
\end{aligned} \tag{11}$$

4. Відношення між фукційними рівняннями та тотожностями

Функційне рівняння розуміється як формула, яка є рівністю двох термів, що містять лише предметні та функційні змінні. До того ж всі предметні змінні зв'язані кванторами загальності. Під *типом (предметним типом)* $(m_1; m_2; m_3)$ функційного рівняння розуміємо кількість повторень кожної незалежної (різної) предметної змінної. Наприклад тип рівняння (3;2) означає, що найбільша кількість незалежних предметних змінних може бути дві з появами їх відповідно три та два в леквикографічному порядку.

Розв'язок функційного рівняння — це послідовність функцій (операцій), що визначені на множині, яка після підстановки замість функційних змінних їх значень із послідовності при лексикографічному порядку, перетворює дане рівняння в істинний вислів. Лексикографічний порядок предметних змінних означає, що їх появи записуються відповідно до алфавітного порядку змінних.

Означення 1. *Кажуть, що два функційні рівняння* рівносильні на носієві*, якщо вони мають одну й ту ж множину розв'язків на даному носієві. Два чистих функційних рівняння називають* рівносильними*, якщо вони рівносильні на кожному носієві, тобто якщо в них один і той же многовид розв'язків.*

Слідуючи Саду [20], операцію назвемо *діагональною*, якщо $f(x;x)$ є підстановкою носія. Бінарну функційну змінну назвемо *діагональною*, якщо вона представляє діагональні операції.

Два функційні рівняння називаються *парастрофно-первинно рівносильними*, якщо одне з них можна отримати за скінченну кількість таких кроків:

1) застосування гіпер-тотожностей (11);

2) заміна сторін рівняння;

3) переіменування предметних змінних;

4) переіменування функційних змінних.

Означення 2. ([2]) *Два функційних рівняння називаються* парастрофно-первинно рівносильними*, якщо одне з іншого можна отримати за скінченну кількість застосувань таких парастрофно-первинних перетворень:*

1) перейменування предметних змінних;
2) перейменування функційних змінних;
3) перетворення за комутуванням: заміна підтерма виду $F(\omega,\upsilon)$ *термом* ${}^{s}F(\upsilon,\omega)$*;*
4) перетворення за зовнішнім діленням: перехід від рівності виду
$F_1(\omega_1,\omega_2)=F_2(\upsilon_1,\upsilon_2)$ *до рівності* ${}^{r}F_1(\omega_1,F_2(\upsilon_1,\upsilon_2))=\omega_2$*;*
5) перетворення за внутрішнім правим (лівим) діленням через змінну x*: заміна підтерма* $F(x,\omega)$ *на* x *і одночасно заміна всіх інших появ змінної* x *термом* ${}^{r}F(x,\omega)$ *(заміна підтерма* $F(\omega,x)$ *на* x *і одночасно заміна всіх інших появ змінної* x *термом* ${}^{\ell}F(\omega,x)$*), якщо* x *не має появи в термі* ω*;*
6) заміна частин рівняння: заміна рівняння $\omega=\upsilon$ *на* $\upsilon=\omega$*.*

Два функційні рівняння називаються *діагонально парастрофними*, якщо одне з них можна отримати за скінченну кількість таких кроків:

1) застосування гіпер-тотожностей (11) [10];
2) заміна сторін рівняння;
3) переіменування предметних змінних;
4) переіменування функційних змінних
5) заміна підтерма $F(x;x)$ на підтерм $\delta_F(x)$, якщо F є діагональною функційною змінною і навпаки.

Перетворення за комутуванням, внутрішнє ділення на підтерм через змінну та зовнішнє ділення на деякий підтерм називають парастрофно-первинними перетвореннями рівняння (в [2] такі перетворення названі парастрофними).

Кажуть, що рівняння $\omega=\upsilon$ *зводиться до* рівняння $\omega'=\upsilon'$, якщо від одного до іншого можна перейти за скінченну кількість застосувань парастрофно-первинних перетворень 1)-6).

З результатів [11]] випливає такий наслідок.

Наслідок 5. *Якщо функційні рівняння* $\omega=\upsilon$ *і* $\omega'=\upsilon'$ *типу* $(3;2)$ *є парастрофно-первинно рівносильними, то існують перестановки* $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ *множини* Q *та* τ *з множини* $\{1,2,3\}$ *такі, що для довільного розв'язку* (f_1,f_2,f_3) *рівняння* $\omega=\upsilon$ *вибірка* $({}^{\sigma_{1\tau}}f_{1\tau},{}^{\sigma_{2\tau}}f_{2\tau},{}^{\sigma_{3\tau}}f_{3\tau})$ *є розв'язком рівняння* $\omega'=\upsilon'$*.*

Означення 3. *Перехід від тотожності* $\mathfrak{id}$ *до тотожності* ${}^{\sigma}\mathfrak{id}$ *називається* парастрофним перетворенням (σ-парастрофним перетворенням)*, якщо тотожність можна отримати заміною головної операції на її* σ^{-1}*-парастроф.*

Перетворення від тотожності $\mathfrak{id}$ до тотожності $\mathfrak{id}'$ з використанням первинних тотожностей (1) – (2) називається *первинним перетворенням* в статті Сохацького [2] раніше вживався термін "парастрофне" перетворення.

Дві тотожності називаються:

1) *рівносильними*, якщо вони визначають один і той самий многовид;
2) *первинно-рівносильними*, якщо одну з них можна отримати з іншої за допомогою скінченної кількості застосувань первинних тотожностей (1) – (2) (первинно-рівносильні тотожності є рівносильними);

3) σ -*парастрофними*, якщо одну з іншої можна отримати за допомогою σ -парастрофних перетворень;

4) σ -*парастрофно-рівносильними*, якщо вони визначають σ -парастрофні многовиди (згідно Теореми 1., σ -парастрофно-рівносильні тотожності визначають σ -парастрофні многовиди);

5) σ -*парастрофно-первинно рівносильними*, якщо одна з них можна отримати за домогою скінченної кількості завтосувань первинних тотожностей (1) – (2) і σ_1 -, σ_2 -, $\ldots$, σ_k - парастрофних перетворень, таких що $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k = \sigma$ для деяких $k \in \mathbb{N}$.

В загальному випадку σ будемо опускати. Наприклад, дві тотожності називаються *парастрофно-рівносильними*, якщо вони σ -парастрофно-рівносильні для деяких $\sigma \in S_3$.

Тотожності, які виконуються в ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$ Стейн називає *спряженими* [23], Сад — *парастрофними* [19].

Наприклад, якщо ${}^{\iota}\mathfrak{A}$ є групою, тобто визначається в класі квазігруп тотожністю асоціативності, то ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$ визначатиметься однією із тотожностей:

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \quad (x \cdot y) \cdot (x \cdot z) = yz, \quad (y \cdot x) \cdot (z \cdot x) = yz$$

Стейн в [23] знаходить парастрофні тотожності для деяких відомих тотожностей, зокрема таких як асоціативність, ідемпотентність, медіальність, комутативність та тотожність Стейна (I закон Стейна). Білоусов в [4] описує отримані результати Стейна та подає їх в Таблиці 1.

	ідемпоте нтність	*комута тивність*	*the first Stein law*	*асоціати вність*	*медіаль ність*
$\mathfrak{A}$	$xx = x$	$xy = yx$	$x \cdot xy = yx$	$xy \cdot z = x \cdot yz$	$xy \cdot uv = xu \cdot yv$
${}^{\ell}\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$y \cdot yx = x$	$x(y \cdot yx) = yx$	$yx \cdot zx = yz$	$\mathfrak{A}$
${}^{r}\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$yx \cdot x = y$	$(x \cdot xy)y) = x$	$xy \cdot xz = yz$	$\mathfrak{A}$
${}^{s}\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$yx \cdot x = xy$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$
${}^{s\ell}\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	${}^{\ell}\mathfrak{A}$	$(xy \cdot y)x = xy$	${}^{\ell}\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$
${}^{sr}\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	${}^{r}\mathfrak{A}$	$y(yx \cdot x) = x$	${}^{r}\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$

В таблиці, яку сформував Білоусов [4], є ще дві парастрофні тотожності — ліва дистрибутивність та двостороння дистрибутивність. Парастрофні тотожності двосторонньої дистрибутивності Білоусов описав у [?]. В його таблиці у рядку лівої дистрибутивності залишилися пустими клітинки для ${}^{\ell}\mathfrak{A}$ та для ${}^{sr}\mathfrak{A}$, оскільки для нього було невідомим існування тотожностей з відповідними операціями. Сохацький в [4] вводить поняття середньої дистрибутивності і заповнює пропущені клітинки. Разом з результатами Білоусова [?] та Сохацького [4] отримуємо Таблицю 2.

	двостороння дистрибутивність	*ліва дистрибутивність*
$\mathfrak{A}$	$x \cdot yz = xy \cdot xz, \quad yz \cdot x = yx \cdot zx$	$x \cdot yz = xy \cdot xz$
${}^{\ell}\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$x \overset{\ell}{\cdot} yz = (x \overset{\ell}{\cdot} y) \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} z)$
${}^{r}\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$
${}^{s}\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$yz \cdot x = yx \cdot zx$
${}^{s\ell}\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$yz \overset{r}{\cdot} x = (y \overset{r}{\cdot} x) \cdot (z \overset{r}{\cdot} x)$
${}^{sr}\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	${}^{s}\mathfrak{A}$

5. Класифікація узагальнених рівнянь

В цій частині статті розглянемо чисті узагальнені функційні рівняння довжини три на бінарних квазігрупових операціях.

Функційні рівняння довжини три досліджував В.Д. Білоусов [7], Р. Коваль' [11], автор [8] та інші. В.Д. Білоусов [7] вивчав функційне рівняння виду

$$F_1(x; F_2(x; F_3(x; y)))) = y, \tag{12}$$

в якому розглядав $F_1 = F_2 = F_3 = {}^{\sigma}f$. Він класифікував такі тотожності та отримав 7 різних многовидів з даного класу функційних рівнянь.

В цій частині роботи систематизовано класифікацію узагальнених функційних рівнянь від трьох функційних змінних і всеможливими появами предметних змінних. Оскільки функційні рівняння квазігрупові, то кожна предметна змінна має принаймні дві появи.

Зауваження 1. *Якщо функційне рівняння має лише одну появу однієї із предметних змінних і таке рівняння має розв'язок на множині оборотних функцій деякої базової множини, то ця множина є одноелементною.*

Теорема 2. *Всі чисті узагальнені нетривіальні бінарні квазігрупові функційні рівняння довжини три парастрофно-первинно рівносильні точно одному із таких рівнянь: предметного типу* $(3; 2)$ *:*

$$F_1(x; F_2(x; y)) = F_3(x; y), \tag{13}$$

$$F_1(F_2(x; x); y) = F_3(x; y), \tag{14}$$

$$F_1(F_2(x; x); x) = F_3(y; y); \tag{15}$$

предметного типу $(5; 0)$ *:*

$$F_1(x; F_2(x; x))) = F_3(x; x). \tag{16}$$

Перше рівняння (13) розв'язане В.Д. Білоусовим [7]. Розв'язування інших трьох функційних рівнянь (14), (15), (16) досліджувала автор [8]. Ці твердження є очевидними і легко доводяться.

Твердження 2. ([7]) *Трійка оборотних двомісних функцій* (f_1, f_2, f_3) *є квазігруповим розв'язком функційного рівняння* (13) *тоді і тільки тоді, коли виконуються такі співвідношення:*

$$f_1(x; f_2(x; y))) = f_3(x; y).$$

Твердження 3. **([8])** *Трійка оборотних двомісних функцій* (f_1, f_2, f_3) *є квазігруповим розв'язком функційного рівняння* (14) *тоді і тільки тоді, коли виконуються такі співвідношення:*

$$f_2(x;x) = a, \quad f_3(x;y) = f_1(a;y),$$

для довільного елемента $a \in Q$ *.*

Твердження 4. **([8])** *Трійка оборотних двомісних функцій* (f_1, f_2, f_3) *є квазігруповим розв'язком функційного рівняння* (16) *тоді і тільки тоді, коли виконуються такі співвідношення:*

$$f_3(y;y) = a, \quad f_2(x;x) = {}^{\ell}f_1(a;x),$$

для довільного елемента $a \in Q$ *.*

Твердження 5. **([8])** *Трійка оборотних двомісних функцій* (f_1, f_2, f_3) *є квазігруповим розв'язком функційного рівняння* (16) *тоді і тільки тоді, коли виконуються такі співвідношення:*

$$f_2(x;x) = a, \quad f_3(x;x) = f_1(x;a),$$

для довільного елемента $a \in Q$ *.*

Доведення теореми 2. Розглянемо всеможливі узагальнені функційні рівняння довжини три та всі випадки розташування функційних змінних та незалежних предметних змінних.

Якщо всі три функційні змінні знаходяться по одну сторону рівняння, то поділивши зовнішнім ділення на одну з них, отримаємо первинно-рівносильне рівняння, в якому дві функційні змінні знаходяться в лівій частині рівняння, а третя функційна змінна – в правій частині рівняння. Наприклад, нехай маємо рівняння (12). Поділимо зовні на функцію F_1 та поміняємо частини рівняння місцями, в результаті отримаємо рівняння (13).

Оскільки всі такі рівняння мають три появи функційних змінних і всі вони є бінарними, то кількість всіх появ предметних змінних дорівнює п'яти.

Оскільки рівняння є квазігруповими, то з Зауваження 1. випливає, що кожна предметна змінна має принаймні дві появи і кожна з них має не більше двох незалежних предметних змінних. Отже, кожне рівняння має тип або $(5;0)$ або $(3;2)$.

Використовуючи квазігрупові гіпер-тотожності (11) і перейменування змінних, кожне рівняння типу $(5;0)$ є парастрофно-первинно еквівалентним до (16), але всі рівняння типу $(3;2)$ зводяться до рівнянь з розташуванням дужок $1+2=2$ (1, 2 позначають підтерми довжини один та два відповідно).

Якщо обидва підтерми довжини два є квадратами, то рівняння парастрофно-первинно рівносильне рівнянню (15). Якщо один із підтерів довжини два є квадратом, то рівняння парастрофно-первинно еквівалентне до рівняння (13).

Доведемо, що отримані в теоремі рівняння парастрофно-первинно нерівносильні. Для цього для кожної пари функційних рівнянь наведемо приклад трійки оборотних операцій, яка є розв'язком одного рівняння і жодна із трійок парастрофів цих операцій не є розв'язком іншого рівняння. Зазначені трійки операцій зручно подати в такій таблиці.

	(13)	(14)	(15)
(14)	(h,h,h)	$\times$	$\times$
(15)	(k,f,k)	(h,h,h)	$\times$
(16)	(h,h,h)	(f,g,h)	(h,h,h)

,

де f, h, g — попарно різні (можливо ізоморфні) квазігрупи Штейнера, k — лупа Штейнера, які визначені на носієві Q.

Справді, трійка (h,h,h) є розв'язком кожного з рівнянь (14) і (16) за будь-якого носія, а рівняння (13) і (15) ця трійка задовольняє лише тоді, коли носій одноелементний. Тому кожна пара рінянь (13), (14); (13), (16); (14), (15); і (15), (16) парастрофно-первинно нерівносильні.

Оскільки квазігрупа Штейнера ідемпотентна, то трійка (f,g,h) є розв'язком рівняння (16). Із того, що квазігрупа Штейнера тотально симетрична, тобто всі парастрофи однакові, то трійка (f',g',h'), яка є перестановкою операцій f, h, g, мала би бути розв'язком рівняння (14), але це можливо лише тоді, коли носій одноелементний. Тому ріняння (14) і (16) парастрофно-первинно нерівносильні.

І нарешті, трійка (k,f,k) є розв'язком рівняння (15), тоді принаймні одна із трійок (f,k,k), (k,f,k), (k,k,f) є розв'язком рівняння (13), тобто виконується принаймні одна із тотожностей

$$f(x,k(x,y)) = k(x,y), \qquad k(x,f(x,y)) = k(x,y), \qquad k(x,k(x,y)) = f(x,y).$$

В першій рівності замінимо $k(x,y)$ на y, в другій — скоротимо на x, а в третій — скористаємося тотожністю тотально симетричної квазігрупи. В усіх трьох випадках отримаємо одноелементність носія. З отриманого протиріччя випливає парастрофно-первинна нерівносильність рінянь (13) і (15). □

6. Класифікація тотожностей

В.Д. Білоусов в 1983 році класифікував мінімальні функційні рівняння, а саме рівняння типу $(3;2)$ без квадратів, тобто без термів виду $F(x;x)$. Він отримав, що всі вони парастрофно рівносильні узагальненому функційному рівнянню виду (12). Пізніше, Р.В. Коваль в своїй дисертації виписала як приклад неквадратичних узагальнених функційних рівнянь і довела таку

Теорема 3. *(Р.В. Коваль, 2005) Мінімальні неквадратичні узагальнені функційні рівняння парастрофно рівносильні одному із таких рівнянь* (12) *та*

$$F_1(F_2(x;x);y)) = F_3(x;y);$$

$$F_1(F_2(x;x);x) = F_3(y;y).$$

В попередній частині цієї статті встановлено, що всього таких узагальнених рівнянь є точно чотири (Теорема 2.).

7. Класифікація тотожностей за парастрофною рівносильністю

В цій частині статті описані тотожності з точністю до парастрофної рівносильності. Нагадаємо, що тотожності називаються парастрофно рівносильними, якщо вони визначають парастрофні многовиди. Отже, описання тотожностей з точністю до парастрофної рівносильності означає описання пучків многовидів квазігруп, адже парастрофно нерівносильні тотожності визначають многовиди, які належать різним пучкам квазігруп.

Нехай F — довільна функційна змінна, тоді ${}^{\iota}F$, ${}^{\ell}F$, ${}^{r}F$, ${}^{s}F$, ${}^{s\ell}F$, ${}^{sr}F$ називаються *парастрофами змінної* F і вони набувають значення відповідного парастрофа операції f, якщо змінна F набуває значення f. *Узагальненим парастрофом функційної змінної* F назвемо функційну змінну ${}^{\sigma}F$, де σ — змінна, яка набуває значення в множині S_3. Залежні змінні назвемо парастрофно незалежними, якщо вони незалежно набувають значень в множині парастрофів однієї й тієї ж змінної. Функційне рівняння назвемо *узагальненою тотожністю*, якщо всі функційні змінні є попарно різними узагальненими парастрофами однієї і тієї ж функційної змінної. Множина всіх узагальнених тотожностей замкнена відносно первинно парастрофних перетворень, тому з теореми 2. випливає таке твердження.

Наслідок 6. *Кожна узагальнена тотожність довжини три парастрофно-первинно рівносильна точно одній із таких узагальнених тотожностей:*

$$x \overset{\delta}{\cdot} (x \overset{\tau}{\cdot} (x \overset{\nu}{\cdot} y)) = y; \tag{17}$$

$$(x \overset{\delta}{\cdot} x) \overset{\tau}{\cdot} y = x \overset{\nu}{\cdot} y; \tag{18}$$

$$(x \overset{\delta}{\cdot} x) \overset{\tau}{\cdot} x = y \overset{\nu}{\cdot} y; \tag{19}$$

$$(x \overset{\delta}{\cdot} x) \overset{\tau}{\cdot} x = x \overset{\nu}{\cdot} x. \tag{20}$$

Використовуючи означення лівого і правого ділення, маємо такі позначення:

$$\text{якщо} \quad x \overset{\ell}{\cdot} y = z, \quad \text{то} \quad zy = x; \tag{21}$$

$$\text{якщо} \quad x \overset{r}{\cdot} y = z, \quad \text{то} \quad xz = y; \tag{22}$$

$$\text{якщо} \quad x \overset{s\ell}{\cdot} y = z, \quad \text{то} \quad zx = y; \tag{23}$$

$$\text{якщо} \quad x \overset{sr}{\cdot} y = z, \quad \text{то} \quad yz = x. \tag{24}$$

Теорема 4. **(Уточнена теорема Білоусова)** *Будь-яка тотожність виду* (17) *на квазігрупах парастрофно рівносильна точно одній із таких тотожностей:*

$$\textit{I закон Білоусова-Бенета} \quad x(x \cdot xy) = y; \tag{25}$$

$$\textit{II закон Білоусова-Бенета} \quad y(x \cdot xy) = x; \tag{26}$$

$$\textit{I закон Стейна} \quad x \cdot xy = yx; \tag{27}$$

$$\textit{II закон Стейна} \quad xy \cdot x = y \cdot xy; \tag{28}$$

$$\textit{III закон Стейна} \quad yx \cdot xy = x; \tag{29}$$

$$\textit{I закон Шредера} \quad xy \cdot y = x \cdot xy; \tag{30}$$

$$\textit{II закон Шредера} \quad xy \cdot yx = x; \tag{31}$$

$$\textit{одноелементні квазігрупи} \quad x = y. \tag{32}$$

Теорема 5. *Будь-яка тотожність виду* (18) *на квазігрупах парастрофно рівносильна точно одній із таких тотожностей:*

$$x^2 = x; \tag{33}$$

$$x^2 = x \quad \wedge \quad xy = yx; \tag{34}$$

$$x^2 = x \ \wedge \ yx \cdot y = x; \tag{35}$$

$$(y \cdot x^2) \cdot y = x; \tag{36}$$

$$x \cdot (y \cdot x^2) = y; \tag{37}$$

$$x^2 \cdot xy = y. \tag{38}$$

Доведення. Доведемо, що узагальнена тотожність (18) парастрофно рівносильна точно одній системі тотожностей (33) –(18). Інакше кажучи, при будь-яких значеннях параметрів δ, τ, ν із S_3 тотожність (18) визначає многовид, який парастрофний одному із многовидів, що визначені системами тотжностей (33) –(18). До того ж, зазначені многовиди належать до різних пучків, тобто вони попарно не парастрофні між собою.

Оскільки многовиди маємо визначити з точністю до парастрофності, то заміну функційної змінної $\cdot$ будемо робити не лише використовуючи первинні тотожності, а і замінюватимемо її на довільний парастроф.

В узагальненій тотожності (18) виберемо за головну операцію $(\overset{\tau}{\cdot})$, тобто підставимо $(\overset{\tau^{-1}}{\cdot})$ в тотожність замість функційної змінної $(\cdot)$:

$$(x \overset{\delta\tau^{-1}}{\cdot} x) \cdot y = x \overset{\nu\tau^{-1}}{\cdot} y$$

Оскільки $x \overset{s}{\cdot} x = x \cdot x$, то дана узагальнена тотожність рівносильна тотожності

$$(x \overset{\pi}{\cdot} x) \cdot y = x \overset{\kappa}{\cdot} y$$

де $\pi \in \{\iota, \ell, r\}$, $\kappa \in S_3$. В отриманій рівності тепер вибираємо головною операцію $(\overset{\pi}{\cdot})$, в результаті заміни маємо:

$$x^2 \overset{\pi^{-1}}{\cdot} y = x \overset{\tau}{\cdot} y,$$

де $\pi^{-1} \in \{\iota, \ell, r\}$, $\tau := \kappa\pi^{-1} \in S_3$. Отже, маємо три тотожності:

$$x^2 y = x \overset{\tau}{\cdot} y \, (i), \qquad x^2 \overset{\ell}{\cdot} y = x \overset{\tau}{\cdot} y \, (ii), \qquad x^2 \overset{r}{\cdot} y = x \overset{\tau}{\cdot} y. \, (iii)$$

За означенням лівого і правого ділення, отримуємо рівносильні тотожності:

$$x^2 y = x \overset{\tau}{\cdot} y \, (i), \qquad (x \overset{\tau}{\cdot} y) \cdot y = x^2 \, (ii), \qquad x^2 \cdot (x \overset{\tau}{\cdot} y) = y \, (iii).$$

Проаналізуємо кожну з них:

Тотожність (i). При $\tau = \iota$ дана тотожність рівносильна ідемпотентності, оскільки її можна скоротити на y, а тому отримаємо (33).

Якщо $\tau = s$, то тотожність має вигляд $x^2 y = yx$. Поклавши $y = r_{x^2}$ отримаємо $x \cdot x = r_{x^2} \cdot x$. Скоротимо на x: $x = r_{x^2}$. Домножимо зліва на x^2 : $x^2 \cdot x = x \cdot x$. Скоротивши на х, отримаємо ідемпотентність, яка разом з $x^2 y = yx$ дає комутативність, тому має місце (34).

Якщо $\tau = \ell$, тоді *(i)* рівносильна $x^2 = x$. Отже, виконується (35).

Якщо $\tau = r$, тоді *(i)* рівносильна $x \cdot x^2 y = y$. Отже, це ліва IP-квазігрупа, тому отримаємо (38).

Якщо $\tau = s\ell$, тоді *(i)* рівносильна тотожності $x^2 y = y \cdot x$. Скористаємось означенням лівого ділення: $x^2 y \cdot x = y$. При $y = x^2$ отримаємо $(x^2)^2 = x$. Підставимо x^2 замість х: $xy \cdot x^2 = y$. Домножимо зліва на х і замінимо ху на у: отримаємо (37).

Якщо $\tau = sr$, тоді *(i)*: $x^2 y = y \overset{r}{\cdot} x$. Звідси $y \cdot x^2 y = x$. Замінимо $(\cdot)$ на $(\overset{s}{\cdot})$, отримаємо $y \overset{s}{\cdot} ((x \overset{s}{\cdot} x) \overset{s}{\cdot} y) = x$, тобто виконується (36).

Тотожність (ii). Якщо $\tau = \iota$, то *(ii)*: $xy \cdot y = x^2$, при $y = r_x$ дана тотожність дає ідемпотентність, тому $xy \cdot y = x$. r - парастроф отриманої тотожності є комутативністю, тому *(ii)* парастрофна (34).

$\tau = s$, тоді *(ii)* має вигляд $yx \cdot y = x^2$. При $y = x$ отримуємо ідемпотентність, тому (35) виконується.

$\tau = \ell$, тоді *(ii)*: $(x \overset{\tau}{\cdot} y)y = x^2$. Оскільки $r_x = x \overset{\tau}{\cdot} x$, то при $y = x$ маємо $r_x \cdot x = x \cdot x$, тобто $r_x = x$. Зліва домножимно на x: $x = x^2$. В тотожності *(ii)* покладемо $x \overset{\tau}{\cdot} y = z$, тобто $xz = y$, в результаті отримаємо (35).

$\tau = s\ell$, тоді тотожність *(ii)* має вигляд $(y \overset{\ell}{\cdot} x)y = x^2$. Позначимо $l_x = x \overset{\ell}{\cdot} x$, то при $y = x$ маємо $x = x^2$. Замінимо $y \overset{\ell}{\cdot} x = z$, тобто $zx = y$: $z \cdot zx = x$. Дана тотожність парастрофна комутативності, тому отримаємо (34).

$\tau = sr$, тоді *(ii)* має вигляд $(y \overset{r}{\cdot} x)y = x^2$. При $y = x$ маємо $r_x \cdot x = x \cdot x$, тобто $r_x \cdot = x$. Замінивши $y \overset{r}{\cdot} x = z$, тобто $yz = x$, маємо $zy = yz$. Отже, *(ii)* парастрофно рівносильна (34).

Тотожність (iii). Якщо $\tau = \iota$, тоді *(iii)* має вигляд $x^2 \cdot yx = y$. Звідси при $y = x$ маємо $(x^2)^2 = x$, тому замінивши x на x^2 отримаємо (37).

Якщо $\tau = r$, тоді *(iii)* має вигляд $x^2 \cdot (x \overset{r}{\cdot} y) = y$. Нехай $z := x \overset{r}{\cdot} y$, тобто $xz = y$. Тому рівняння *(iii)* рівносильне $x^2z = xz$ Скоротивши на z отримаємо ідемпотентність, тому дане рівняння рівносильне (33).

Якщо $\tau = s\ell$, тоді *(iii)*: $x^2(y \overset{\ell}{\cdot} x) = y$. Замінимо $y \overset{\ell}{\cdot} x = z$, тобто $y = zx$: $x^2z = zx$. При $z = r_{x^2}$ маємо $x \cdot x = r_{x^2} \cdot x$. Звідси $x = r_{x^2}$ домножимо на x^2 зліва: $x^2 \cdot x = x^2$. Скоротивши на x, отримаємо ідемпотентність. Тому з $x^2z = zx$ випливає комутативність. Отже, в цьому випадку тотожність рівносильна системі (34).

Якщо $\tau = sr$, тоді *(iii)*: $x^2(y \overset{r}{\cdot} x) = y$. Нехай $z = y \overset{r}{\cdot} x$, тоді $yz = x$ і тому *(iii)* рівносильна тотжності $(yz)^2 \cdot z = y$. Звідси при $y = z$ отримаємо $y^2 \cdot y = y$, а при $y = l_z$ маємо

$$l_z = (l_z z)^2 \cdot z = z^2 \cdot z = z.$$

Домноживши справа на z, отримаємо ідемпотентність, а тому з $(yz)^2 \cdot z = y$ випливає тотожність $yz \cdot z = y$, яка парастрофна комутативності. Отже, в цьому випадку тотожність *(iii)* парастрофно рівносильна системі (34).

Якщо $\tau = \ell$, тоді *(iii)* рівносильна тотожності $x^2(x \overset{\ell}{\cdot} y) = y$. Підкладемо $x \overset{\ell}{\cdot} y = z$, тобто $zy = x$: $(zy)^2 \cdot z = y$. Звідси при $y = z$ маємо $z^2 \cdot z = z$, а при $y = l_z$ отримаємо

$$l_z = (zl_z)^2 \cdot z = z^2 \cdot z = z$$

Домножимо рівність $l_z = z$ справа на z: $z = z^2$, тому $zy \cdot z = y$. Отже, отримали систему (35).

Для доведення парастрофної нерівносильності використаємо такі таблиці Келі для квазігруп різних порядків:

$*$	1	2	3	4
1	1	3	4	2
2	4	2	1	3
3	2	4	3	1
4	3	1	2	4

$(Q_4; *)$

$\diamond$	1	2	3	4	5
1	1	5	2	3	4
2	5	2	4	1	3
3	2	4	3	5	1
4	3	1	5	4	2
5	4	3	1	2	5

$(Q_5; \diamond)$

$\circ$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	3	1	8	9	5	4	7	6
3	3	1	2	7	6	9	8	4	5
4	4	9	6	5	1	8	3	2	7
5	5	8	7	1	4	3	9	6	2
6	6	5	9	2	8	7	1	3	4
7	7	4	8	9	2	1	6	5	3
8	8	7	4	6	3	2	5	9	1
9	9	6	5	3	7	4	2	1	8

$(Q_9; \circ)$

Тотожність ідемпотентності інваріантна при парастрофній рівносильності, тобто, якщо квазігрупа ідемпотентна, то ідемпотентними є всі її парастрофи. Група Z_3 задовольняє тотожності (37) та (38), проте вона не ідемпотентна, тому тотожності (37) та (38) не можуть бути парастрофно рівносильними жодній з тотожностей (33), (34), (35), (36).

Розглянемо тотожності (33), (34) та (35). Системи тотожностей (33), (35) інваріантні при парастрофії. Якщо припустити, що пари тотожностей (33) і (34) та (34) і (35) парастрофно рівносильні, то це означає, що в кожній квазігрупі, в якій виконуються (33), (35), має виконуватися принаймні один із парастрофів тотожностей, які парастрофно рівносильні (34). Із тотожностей (34): ідемпотентність інваріантна при парастрофії, комутативність парастрофно рівносильна сама собі, або $x \cdot xy = y$ або $xy \cdot y = x$. В $(Q_4; *)$ виконуються (33), (35), але не виконуються (34). Справді, комутативність очевидно з $(Q_4; *)$ не виконується, для тотожності $x \cdot xy = y$ візьмемо довільну пару з $(Q_4; *)$, наприклад, $2 \cdot (2 \cdot 3) = 2 \cdot 1 = 4 \neq 3$, отримали суперечність. Для тотожності $xy \cdot y = x$ з $(Q_4; *)$ маємо $(3 \cdot 4) \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 2 \neq 3$, також суперечність. Отже, пари тотожностей (33) і (34) та (34) і (35) парастрофно нерівносильні.

Розглянемо пару тотожностей (33) і (35). Оскільки ідемпотентність і кососиметричність інваріантна при парастрофії, то для доведення парастрофної нерівносильності (33) і (35) необхідно побудувати ідемпотентну квазігрупу, в якій не виконується кососиметричність. Такою квазігрупою є $(Q_5; \diamond)$. Справді, $(3 \cdot 2) \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 5 \neq 2$. Отже, (33) і (35) парастрофно нерівносильні.

Розглянемо пари тотожностей (33) і (36), (34) і (36). Оскільки ідемпотентність інваріантна при парастрофії, то для доведення парастрофної нерівносильності пар (33) і (36) та (34) і (36) використаємо квазігрупу $(Q_5; \diamond)$, в якій (33) і (34) виконується. Доведемо, що квазігрупа $(Q_5; \diamond)$ не виконується в жодному парастрофі тотожності (36). Для цього використаємо результат твердження

Справді, для ι-парастрофа маємо $(3 \cdot (5 \cdot 5)) \cdot 3 = (3 \cdot 5) \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 2 \neq 5$, для s-парастрофа маємо тотожність $y \cdot (x^2 \cdot y) = x$, а з квазігрупи $(Q_5; \diamond)$ отримуємо $5 \cdot ((4 \cdot 4) \cdot 5) = 5 \cdot (4 \cdot 5) = 5 \cdot 2 = 3 \neq 4$. В ℓ-парастрофі, згідно означення лівого ділення маємо тотожність $xy \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} x) = y$, а з квазігрупи $(Q_5; \diamond)$ отримуємо $(3 \cdot 2) \cdot (3 \overset{\ell}{\cdot} 3) = 4 \cdot 3 = 5 \neq 2$. Для r-парастрофа за означенням правого ділення отримуємо тотожність $(y \overset{r}{\cdot} (x \overset{r}{\cdot} x)) \cdot x = y$, а з квазігрупи $(Q_5; \diamond)$ маємо $(2 \overset{r}{\cdot} (5 \overset{r}{\cdot} 5)) \cdot 5 = (2 \overset{r}{\cdot} 5) \cdot 5 = 1 \cdot 5 = 4 \neq 2$. В sr-парастрофі за комутуванням та означенням правого ділення отримуємо тотожність $(x \overset{r}{\cdot} x) \cdot yx = y$, а з квазігрупи $(Q_5; \diamond)$ маємо $(5 \overset{r}{\cdot} 5) \cdot (3 \cdot 5) = 5 \cdot 1 = 4 \neq 3$. І нарешті для $s\ell$-парастрофа за означенням комутування та лівого ділення отримуємо тотожність $x \cdot ((x \overset{\ell}{\cdot} x) \overset{\ell}{\cdot} y) = y$, а з квазігрупи $(Q_5; \diamond)$ маємо

$3 \cdot ((3 \overset{\ell}{\cdot} 3) \overset{\ell}{\cdot} 2) = 3 \cdot (3 \overset{\ell}{\cdot} 2) = 3 \cdot 5 = 1 \neq 2$. Отже, (33) і (36) та (34) і (36) парастрофно нерівносильні.

Розглянемо пару тотожностей (37) і (38). Вони різні, оскільки тотожність (38) виконується в квазігрупі 9-го порядку $(Q; \circ)$ а тотожність (37) в цій квазігрупі не виконується. Справді, нехай візьмемо будь-яку пару чисел з квазігрупи $(Q; \circ)$ і перевіримо чи виконується тотожність (37):

$$5 \circ (8 \circ (5 \circ 5)) = 5 \circ (8 \circ 4) = 5 \circ 6 = 3 \neq 8.$$

Отже, тотожності (37) і (38) незалежні.

Всі вище описані результати можна подати в такій таблиці:

	(34)	(35)	(36)	(37)	(38)
(33)	$(Q_4; *)$	$(Q_5; \diamond)$	$(Q_5; \diamond)$	Z_3	Z_3
(34)	$\times$	$(Q_4; *)$	$(Q_5; \diamond)$	Z_3	Z_3
(35)	$\times$	$\times$	Z_5	Z_3	Z_3
(36)	$\times$	$\times$	$\times$	Z_3	Z_3
(37)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$(Q_9; \circ)$

$\square$

Теорема 6. *Будь-яка тотожність виду (19) на квазігрупах парастрофно-рівносильна точно одній із таких тотожностей:*

$$x^2 \cdot x = y^2; \tag{39}$$

$$(x^2 \cdot x)y = y; \tag{40}$$

$$(x \cdot x^2)y = y. \tag{41}$$

Доведення. Аналогічне доведенню Теореми 5. $\square$

Теорема 7. *Будь-яка тотожність виду (20) на квазігрупах парастрофно-рівносильна точно одній із таких тотожностей:*

$$x^2 \cdot x^2 = x; \tag{42}$$

$$(x^2 \cdot x)x = x; \tag{43}$$

$$(x \cdot x^2)x = x. \tag{44}$$

Доведення. Просте та очевидне та аналогічне доведенню Теореми 5. $\square$

8. Класифікація парастрофно рівносильних тотожностей за рівносильністю

В попередній частині статті знайдено тотожності з точністю до парастрофної рівносильності, тобто розбивають один узагальнений клас на пучки парастрофних многовидів. В цій частині статті ми описуємо тотожності з точністю до парастрофної рівносильності, які визначають парастрофні многовиди та описуємо тотожності з точністю до рівносильності, які визначають один многовид в пучку.

Пучки тотожностей виду (17)

Твердження 6. *Нехай многовид* $\mathfrak{A}$ *визначається тотожністю (25), тоді многовиди визначаються*

$$\mathfrak{A} = {}^r\mathfrak{A} \quad \text{тотожністю} \quad x(x \cdot xy) = y; \tag{45}$$

$$^s\mathfrak{A} = {}^{sr}\mathfrak{A} \quad \text{тотожністю} \quad (yx \cdot x)x = y; \tag{46}$$

$$^\ell\mathfrak{A} = {}^{s\ell}\mathfrak{A} \quad \text{кожною із тотожностей} \quad x(yx \overset{\ell}{\cdot} y) = yx, \ (x \overset{r}{\cdot} yx)y = yx. \tag{47}$$

Доведення. З наслідку 3. випливає, що r-парастроф $^r\mathfrak{A}$ многовида $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю

$$x \overset{r}{\cdot} (x \overset{r}{\cdot} (x \overset{r}{\cdot} y)) = y.$$

Скориставшись означенням правого ділення тричі, отримуємо тотожність (45), яка збігається з (25), тобто тотожність (45) визначає многовид $\mathfrak{A} = {}^r\mathfrak{A}$.

s-парастроф многовида $^s\mathfrak{A}$ визначається тотожністю

$$x \overset{s}{\cdot} (x \overset{s}{\cdot} (x \overset{s}{\cdot} y)) = y.$$

Згідно означення комутування, переставивши підтерми, отримаємо (46). Згідно наслідку 4., s-парастроф тотожності (46) визначає многовид $^s\mathfrak{A} = {}^{sr}\mathfrak{A}$. А це означає істинність пункту (46).

ℓ-парастроф $^\ell\mathfrak{A}$ многовида $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю

$$x \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} y)) = y.$$

звідси, за означенням лівого ділення з лівої частини, отримуємо:

$$y(x \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} y)) = x.$$

В отриманій тотожності скористаємося заміною (21)

$$y(zy \overset{\ell}{\cdot} z) = zy.$$

Перейменуємо відповідно предметні змінні y на x, z на y, в результаті отримаємо першу тотожність з (47). В тотожності (47) використаємо праве ділення для лівої сторони, отримаємо

$$x \overset{r}{\cdot} yx = yx \overset{\ell}{\cdot} y,$$

звідси за означенням лівого діленя з правої сторони маємо другу тотожність з (47). Отже, тотожності в (47) рівносильні і визначають многовид $^\ell\mathfrak{A}$. Згідно наслідку 4., s-парастроф тотожності (47), визначає многовид $^\ell\mathfrak{A} = {}^{s\ell}\mathfrak{A}$ □

Тотожність (45) знайдена Білоусовим, тотожність (46) – Бенетом, а тотожності (47) – автором.

Твердження 7. *Нехай многовид* $\mathfrak{A}$ *визначається тотожністю (26), тоді його парастрофи визначаються кожною із тотожностей, що зазначені у відповідному рядку:*

$$\mathfrak{A}: \quad y(x \cdot xy) = x, \quad xy(xy \cdot x) = y; \tag{48}$$

$$^s\mathfrak{A}: \quad (yx \cdot x)y = x, \quad (x \cdot yx)yx = y; \tag{49}$$

$$^\ell\mathfrak{A}: \quad x(yx \cdot y) = yx; \tag{50}$$

$$^r\mathfrak{A}: \quad x(x \cdot yx) = y, \quad (x \cdot xy)x = y, \quad x(xy \cdot x) = y; \tag{51}$$

$$^{s\ell}\mathfrak{A}: \quad (x \cdot yx)y = yx; \tag{52}$$

$$^{sr}\mathfrak{A}: \quad (xy \cdot x)x = y, \quad x(yx \cdot x) = y, \quad (x \cdot yx)x = y. \tag{53}$$

Доведення. Для знаходження тотожностей, які визначають парастрофи многовида $\mathfrak{A}$, застосовуватимемо наслідок 3.. Отже, s-парастроф ${}^s\mathfrak{A}$ визначається тотожністю

$$y \overset{s}{\cdot} (x \overset{s}{\cdot} (x \overset{s}{\cdot} y)) = x.$$

Згідно означення комутування, переставивши підтерми, отримуємо першу тотожність (49). Отже, многовид ${}^s\mathfrak{A}$ визначається тотожністю (49).

ℓ-парастроф ${}^\ell\mathfrak{A}$ многовиду $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю

$$y \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} y)) = x.$$

В цій тотожності за означенням лівого ділення отримуємо:

$$x \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} y)) = y.$$

Використовуючи (21) для $(x \overset{\ell}{\cdot} y)$ замінимо:

$$x \overset{\ell}{\cdot} y =: t \leftrightarrow ty = x \leftrightarrow t \overset{r}{\cdot} x = y,$$

в результаті отримаємо

$$x \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} t) = t \overset{r}{\cdot} x.$$

За означенням правого ділення маємо

$$t(x \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} t)) = x.$$

Скориставшись заміною (21) для терма $(x \overset{\ell}{\cdot} t)$ та відповідним перейменуванням змінних, в результаті отримаємо тотожність з (50). Отже, многовид ${}^\ell\mathfrak{A}$ визначається тотожністю (50).

Замінивши в (50) головну операцію на s-парастроф, ми отримаємо тотожність

$$x \overset{s}{\cdot} ((y \overset{s}{\cdot} x) \overset{s}{\cdot} y)) = y \overset{s}{\cdot} x,$$

яка, згідно наслідку 4., є $s\ell$-парастрофом тотожності (26), тобто визначає многовид ${}^{s\ell}\mathfrak{A}$. Скориставшись означенням комутування термів, в результаті отримаємо першу тотожність з (52). Отже, многовид ${}^{s\ell}\mathfrak{A}$ визначається тотожністю (52).

r-парастроф ${}^r\mathfrak{A}$ многовида $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю

$$y \overset{r}{\cdot} (x \overset{r}{\cdot} (x \overset{r}{\cdot} y)) = x.$$

Звідси, за означенням правого ділення лівої частини тричі підряд маємо першу тотожність з (51). Це означає, що многовид ${}^r\mathfrak{A}$ визначається першою тотожністю (51)

$$y = x(x \cdot yx).$$

Замінивши в тотожності (51)головну операцію на s - парастроф, потім скориставшись означенням комутування, в результаті лотримаємо (53). Це означає, що многовид ${}^{sr}\mathfrak{A}$ визначається першою тотожністю (53).

Доведемо рівносильність тотожностей в кожному многовидів. Розглянемо многовид $\mathfrak{A}$. В першій тотожності (48) скористаємося означенням правого ділення зліва:

$$y \overset{r}{\cdot} x = x \cdot xy.$$

Скориставшись заміною (22) для лівої частини отриманої рівності та перейменувавши відповідно предметні змінні, отримуємо другу тотожність з (48).

Розглянемо многовид ${}^{s}\mathfrak{A}$. В першій рівності (49) за означенням лівого ділення зліва маємо

$$x \overset{\ell}{\cdot} y = yx\cdot).$$

Скориставшись заміною (21) для лівої частини отриманої рівності та перейменувавши відповідно предметні змінні, отримуємо другу тотожність з (49).

Розглянемо многовид ${}^{r}\mathfrak{A}$. Домножимо обидві частини рівності (50) на x справа та замінивши в отриманій рівності yx на x, в результаті отримаємо другу рівність з (50). Домножимо другу рівність з (50) на x зліва та замінимо xy на y, в результаті матимемо третю рівність з (50). Оскільки ми рухалися за рівносильністю, то всі тотожності (50) рівносильні і визначають многовид ${}^{r}\mathfrak{A}$.

Аналогічно доводиться рівносильність тотожностей многовиду ${}^{sr}\mathfrak{A}$. □

Твердження 8. *Нехай многовид* $\mathfrak{A}$ *визначається тотожністю (27), тоді многовиди визначаються*

${}^{s}\mathfrak{A}$	*тотожністю*	$yx \cdot x = xy;$	(54)
${}^{\ell}\mathfrak{A}$	*тотожністю*	$x(y \cdot yx) = yx;$	(55)
${}^{r}\mathfrak{A}$	*кожною із тотожностей*	$xy \cdot (xy \cdot y) = x,\ (x \cdot xy) \cdot y = x;$	(56)
${}^{s\ell}\mathfrak{A}$	*тотожністю*	$(xy \cdot y) \cdot x = xy;$	(57)
${}^{sr}\mathfrak{A}$	*кожною із тотожностей*	$(x \cdot xy) \cdot xy = y,\ y \cdot (yx \cdot x) = x.$	(58)

Доведення. Для знаходження тотожностей, які визначають парастрофи многовида $\mathfrak{A}$, застосовуватимемо наслідок 3.. Отже, s-парастроф ${}^{s}\mathfrak{A}$ визначається тотожністю

$$x \overset{s}{\cdot} (x \overset{s}{\cdot} y) = y \overset{s}{\cdot} x.$$

Згідно означення комутування, переставивши підтерми, отримаємо (54).

ℓ-парастроф многовиду ${}^{\ell}\mathfrak{A}$ визначається тотожністю

$$x \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} y) = y \overset{\ell}{\cdot} x.$$

В цій тотожності за означенням лівого ділення отримуємо:

$$(y \overset{\ell}{\cdot} x) \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} y) = x.$$

Для $(y \overset{\ell}{\cdot} x)$ скористаємося заміною (21), в результаті отримаємо

$$t \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} tx) = x.$$

З цієї тотожності за означенням правого ділення маємо:

$$t \overset{r}{\cdot} x = x \overset{\ell}{\cdot} tx,$$

а за означенням лівого ділення отримуємо:

$$(t \overset{r}{\cdot} x) \cdot tx = x.$$

Для цієї рівності, враховуючи заміну (22), використаємо таку заміну $t \overset{r}{\cdot} x =: y$, тобто $ty = x$. В результаті отримаємо тотожність

$$y \cdot (t \cdot ty) = ty.$$

Перейменувавши y через x та t через y, отримаємо тотожність з (55). Отже, многовид ${}^{\ell}\mathfrak{A}$ визначається тотожністю (55).

Замінивши в (55) головну операцію на s-парастроф, ми отримаємо тотожність

$$x \overset{s}{\cdot} (y \overset{s}{\cdot} (y \overset{s}{\cdot} x)) = y \overset{s}{\cdot} x,$$

яка, згідно наслідку 4., є $s\ell$-парастрофом тотожності (27), тобто визначає многовид ${}^{s\ell}\mathfrak{A}$. Скориставшись означенням комутування термів, в результаті отримаємо тотожність з (57).

r-парастроф многовида ${}^{r}\mathfrak{A}$ визначається тотожністю

$$x \overset{r}{\cdot} (x \overset{r}{\cdot} y) = y \overset{r}{\cdot} x.$$

Звідси за означенням правого ділення лівої частини маємо:

$$x \cdot (y \overset{r}{\cdot} x) = x \overset{r}{\cdot} y.$$

В цій тотожності також з означення правого ділення для правої частини, отримуємо:

$$x \cdot (x \cdot (y \overset{r}{\cdot} x)) = y.$$

Скориставшись заміною (22), отримуємо тотожність, в якій перейменуємо відповідно предметні змінні, в результаті отримаємо першу тотожність з (56). Отже, тотожність (56) визначає многовид ${}^{r}\mathfrak{A}$.

Оскільки тотожність (58) є s-парастрофом тотожності (56), то, згідно наслідку 4., тотожність (58) визначає многовид ${}^{sr}\mathfrak{A}$.

Згідно означення 1., $s\ell$-парастроф многовида ${}^{s\ell}\mathfrak{A}$ визначається тотожністю

$$x \overset{sr}{\cdot} (x \overset{sr}{\cdot} y) = y \overset{sr}{\cdot} x,$$

бо $(s\ell)^{-1} = sr$. За означенням комутування з останньої рівності маємо:

$$(y \overset{r}{\cdot} x) \overset{r}{\cdot} x = x \overset{r}{\cdot} y.$$

Скористаємося в цій тотожності означенням правого ділення для лівої частини:

$$(y \overset{r}{\cdot} x) \cdot (x \overset{r}{\cdot} y) = x.$$

В цій тотожності скористаємося заміною (22) для терма $(y \overset{r}{\cdot} x)$, в результаті отримаємо

$$t \cdot (yt \overset{r}{\cdot} y) = yt.$$

За означенням правого ділення маємо:

$$t \overset{r}{\cdot} yt = yt \overset{r}{\cdot} y.$$

В отриманій тотожності введемо заміну, а саме $yt =: x$, тобто $x \overset{\ell}{\cdot} t = y$. В результаті отримаємо рівносильну тотожність:

$$t \overset{r}{\cdot} x = x \overset{r}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} t).$$

В цій тотожності спочатку за означення правого ділення з правої частини, а потім за означенням лівого ділення теж з правої частини отримуємо

$$(x \cdot (t \overset{r}{\cdot} x)) \cdot t = x.$$

Скористаємося заміною (22) для терма $(t \overset{r}{\cdot} x)$ з відповідним взаємним перейменуванням предметних змінних отримуємо тотожність (57). Отже, тотожність (57) визначає многовид ${}^{s\ell}\mathfrak{A}$.

Згідно означення 1., sr-парастроф многовида ${}^{sr}\mathfrak{A}$ визначається тотожністю

$$x \overset{s\ell}{\cdot} (x \overset{s\ell}{\cdot} y) = y \overset{s\ell}{\cdot} x,$$

$(sr)^{-1} = s\ell$. За означенням комутування звідси маємо:

$$(y \overset{\ell}{\cdot} x) \overset{\ell}{\cdot} x = x \overset{\ell}{\cdot} y.$$

За означенням правого ділення для лівої частини тотожності маємо:

$$(y \overset{\ell}{\cdot} x) \overset{r\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} y) = x,$$

оскільки $r\ell = r\ell rr = sr$, то, враховуючи означення комутативності, отримуємо:

$$(x \overset{\ell}{\cdot} y) \overset{r}{\cdot} (y \overset{\ell}{\cdot} x) = x.$$

В отриманій тотожності скористаємося заміною (21) для терму $(y \overset{\ell}{\cdot} x)$, матимемо:

$$(x \overset{\ell}{\cdot} tx) \overset{r}{\cdot} t = x.$$

За означенням лівого ділення для лівої частини маємо:

$$x \overset{\ell}{\cdot} tx = x \overset{\ell r}{\cdot} t.$$

Оскільки $\ell r = \ell r \ell\ell = s\ell$, то скориставшись комутуванням, отримуємо:

$$x \overset{\ell}{\cdot} tx = t \overset{\ell}{\cdot} x.$$

Згідно означення лівого ділення для лівої частини цієї рівності маємо:

$$(t \overset{\ell}{\cdot} x) \cdot tx = x.$$

В цій тотожності покладемо $t \overset{\ell}{\cdot} x =: y$, тобто $yx = t$. В результаті отримаємо другу тотожність з (58), тому вона визначає многовид ${}^{sr}\mathfrak{A}$.

Для отримання інших тотожностей скористаємося наслідком 4.. А саме, друга тотожність із (58) визначає многовид ${}^{sr}\mathfrak{A}$, тому її s-парастроф визначає многовид ${}^{ssr}\mathfrak{A} = {}^{r}\mathfrak{A}$, тобто отримали другу тотожність з (56).

Знайдемо ℓ-парастроф другої тотожності з (58):

$$y \overset{\ell}{\cdot} ((y \overset{\ell}{\cdot} x) \overset{\ell}{\cdot} x) = x.$$

Скористаємося означенням лівого ділення:

$$x \cdot ((y \overset{\ell}{\cdot} x) \overset{\ell}{\cdot} x) = y.$$

Покладемо $t := (y \overset{\ell}{\cdot} x) \overset{\ell}{\cdot} x$, звідси $y = tx \cdot x$, тобто отримали тотожність (54). Знову згідно наслідку 4., дана тотожність визначає ℓsr-парастроф многовида $\mathfrak{A}$, тобто многовид ${}^{s}\mathfrak{A}$, позаяк $\ell sr = s$.

r-парастроф другої тотожності з (58) має вигляд

$$y \overset{r}{\cdot} ((y \overset{r}{\cdot} x) \overset{r}{\cdot} x) = x.$$

Скористаємося означенням правого ділення:

$$yx = (y \overset{r}{\cdot} x) \overset{r}{\cdot} x, \quad \text{тобто} \quad x = (y \overset{r}{\cdot} x) \cdot yx.$$

Замінивши $y \overset{r}{\cdot} x$ на y, отримаємо тотожність з (55). За наслідком 4., вона визначає многовид ${}^{\ell}\mathfrak{A}$, оскільки $rsr = \ell$.

sr-парастроф другої тотожності з (58) має вигляд

$$y \overset{s\ell}{\cdot} ((y \overset{s\ell}{\cdot} x) \overset{s\ell}{\cdot} x) = x, \quad \text{тобто} \quad (x \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} y)) \overset{\ell}{\cdot} y = x.$$

Скористаємося означенням лівого ділення:

$$xy = x \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} y), \quad \text{тобто} \quad xy \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} y) = x$$

Покладемо $t := x \overset{\ell}{\cdot} y$, тобто $x = ty$: $(ty \cdot y)t = ty$. Отримана тотожність збігається з тотожністю з (57), тому (57) визначає многовид ${}^{s\ell}\mathfrak{A}$, оскільки $srsr = s\ell$.

$s\ell$-парастроф другої тотожності з (58) збігається з тотожністю (27). □

Новими тотожностями в Твердженні 8. є перша тотожність із (56) та перша тотожність із (58). Решта тотожностей з Твердженні 8. знайдені ще Стейном в 1957 році.

Твердження 9. *Нехай многовид $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю (28), тоді многовиди визначаються*

$$\mathfrak{A} = {}^{s}\mathfrak{A} \quad \textit{тотожністю} \quad xy \cdot x = y \cdot xy; \tag{59}$$

$${}^{\ell}\mathfrak{A} = {}^{sr}\mathfrak{A} \quad \textit{тотожністю} \quad y \cdot (x \cdot yx) = x; \tag{60}$$

$${}^{r}\mathfrak{A} = {}^{s\ell}\mathfrak{A} \quad \textit{тотожністю} \quad (xy \cdot x) \cdot y = x. \tag{61}$$

Доведення. З наслідку 3. випливає, що многовид ${}^s\mathfrak{A}$ визначається тотожністю

$$(x \overset{s}{\cdot} y) \overset{s}{\cdot} x = y \overset{s}{\cdot} (x \overset{s}{\cdot} y).$$

тобто $x \cdot yx = yx \cdot y$, яка збігається з (59). Це означає, що $\mathfrak{A} = {}^s\mathfrak{A}$. З цієї рівності випливають такі рівності

$${}^\ell\mathfrak{A} = {}^{\ell s}\mathfrak{A} = {}^{sr}\mathfrak{A}, \qquad {}^r\mathfrak{A} = {}^{rs}\mathfrak{A} = {}^{s\ell}\mathfrak{A}.$$

Скориставшись знову наслідком 3., отримуємо, що многовид ${}^\ell\mathfrak{A}$ визначається тотожністю

$$(x \overset{\ell}{\cdot} y) \overset{\ell}{\cdot} x = y \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} y).$$

В цій тотожності використаємо заміну (21), отримаємо:

$$z \overset{\ell}{\cdot} zy = y \overset{\ell}{\cdot} z,$$

звідси за означенням лівого ділення лівої частини маємо:

$$(y \overset{\ell}{\cdot} z) \cdot zy = z.$$

Знову скористаємося заміною (21). А саме, $y \overset{\ell}{\cdot} z =: u$, $uz = y$ в результаті отримаємо тотожність

$$u \cdot (z \cdot uz) = z,$$

Перейменувавши $y := u$, $x := z$, отримаємо (60).

З наслідку 4. випливає, що многовид ${}^{s\ell}\mathfrak{A}$ визначається s-парастрофом тотожності (60):

$$y \overset{s}{\cdot} (x \overset{s}{\cdot} (y \overset{s}{\cdot} x)) = x,$$

яка рівносильна (61). □

Твердження 10. *Нехай многовид $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю (29), тоді многовиди визначаються*

$$\mathfrak{A} = {}^s\mathfrak{A} \quad \textit{тотожністю} \quad yx \cdot xy = x; \tag{62}$$

$${}^\ell\mathfrak{A} = {}^{sr}\mathfrak{A} \quad \textit{тотожністю} \quad (xy \cdot x) \cdot xy = y; \tag{63}$$

$${}^r\mathfrak{A} = {}^{s\ell}\mathfrak{A} \quad \textit{тотожністю} \quad xy \cdot (y \cdot xy) = x. \tag{64}$$

Доведення. З наслідку 3. випливає, що многовид ${}^s\mathfrak{A}$, визначається s-парастрофом тотожності (62), яка збігаться з (62). Це означає виконання рівності $\mathfrak{A} = {}^s\mathfrak{A}$, яка, в свою чергу, спричинює інші рівності многовидів.

ℓ-парастроф многовида ${}^\ell\mathfrak{A}$ визначається тотожністю

$$(y \overset{\ell}{\cdot} x) \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} y) = x,$$

звідси, за означенням лівого ділення з лівої частини, отримуємо:

$$x \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} y) = y \overset{\ell}{\cdot} x,$$

потім знову за означенням лівого ділення вже з правої частини, маємо:

$$(x \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} y)) \cdot x = y.$$

В отриманій тотожності скористаємося заміною (21) та перейменуємо відповідно предметні змінні. В результаті отримаємо (63), тобто тотожність (63) визначає многовид ${}^{\ell}\mathfrak{A}$. Згідно наслідку 4., s-парастроф тотожності (63), тобто тотожність (64), визначає многовид ${}^{s\ell}\mathfrak{A} = {}^{r}\mathfrak{A}$. А це означає істинність пунктів твердження (63) та (64). □

Твердження 11. *Многовид, що визначається тотожністю (30), тотально симетричний.*

Доведення. Справді, нехай многовид $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю (30). Враховуючи наслідок 3., многовид ${}^{s}\mathfrak{A}$ визначається тотожністю

$$(x \overset{s}{\cdot} y) \overset{s}{\cdot} y = x \overset{s}{\cdot} (x \overset{s}{\cdot} y).$$

За означенням комутування та заміною лівої і правої частини місцями, а також взаємним перейменуванням предметних змінних x, y, в результаті отримаємо теж тотожність (30). Це означає, що виконання рівності $\mathfrak{A} = {}^{s}\mathfrak{A}$, тому група парастрофних симетрій многовида $\mathfrak{A}$ містить перестановку s.

Згідно наслідку 3., многовид ${}^{\ell}\mathfrak{A}$ визначається тотожністю

$$(x \overset{\ell}{\cdot} y) \overset{\ell}{\cdot} y = x \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} y).$$

В отриманій тотожності скористаємося заміною (21):

$$z \overset{\ell}{\cdot} y = zy \overset{\ell}{\cdot} z.$$

За означенням лівого ділення для правої частини тотожності маємо:

$$(z \overset{\ell}{\cdot} y) \cdot z = zy.$$

Покладемо $t := z \overset{\ell}{\cdot} y$, тобто $ty = z$:

$$t \cdot ty = ty \cdot y,$$

тобто отримали тотожність (30). Це означає, що виконання рівності $\mathfrak{A} = {}^{\ell}\mathfrak{A}$, тому група парастрофних симетрій многовида $\mathfrak{A}$ містить перестановку ℓ. Оскільки перестановки ℓ, s є твірними групи S_3, то група парастрофних симетрій многовида $\mathfrak{A}$ дорівнює S_3, а це означає, що многовид $\mathfrak{A}$ є тотально симетричним. □

Твердження 12. *Многовид, що визначається тотожністю (31), тотально симетричний.*

Доведення. Нехай $\mathfrak{A}$ — многовид, який визначається тотожністю (31). Очевидно, що s-парастроф цієї тотожності збігається з нею самою, тому $\mathfrak{A} = {}^{s}\mathfrak{A}$, тобто s належить групі парастрофних симетрій многовида $\mathfrak{A}$. ℓ-парастроф ${}^{\ell}\mathfrak{A}$ визначається тотожністю

$$(x \overset{\ell}{\cdot} y) \overset{\ell}{\cdot} (y \overset{\ell}{\cdot} x) = x,$$

звідки, за означенням лівого ділення маємо

$$x \cdot (y \overset{\ell}{\cdot} x) = x \overset{\ell}{\cdot} y,$$

ще раз, згідно означення лівого ділення отримуємо:

$$(x \cdot (y \overset{\ell}{\cdot} x)) \cdot y = x.$$

Покладемо $t := y \overset{\ell}{\cdot} x$, тобто $y = tx$. В результаті отримаємо тотожність $xt \cdot tx = x$, тому ℓ також належить групі парастрофних симетрій многовида $\mathfrak{A}$. Оскільки ця група містить твірні групи S_3, то вона дорівнює S_3, тобто многовид $\mathfrak{A}$ тотально симетричний. □

Пучки тотожностей виду (18)

Твердження 13. *Многовид, що визначається тотожністю (33), тотально симетричний.*

Доведення. Просте й очевидне. □

Цей результат отриманий Стейном в 1957 році [23].

Твердження 14. *Многовид, що визначається системою тотожностей (34) є односторонньо симетричний.*

Доведення. В системі тотожностей (34) є тотожність ідемпотентності, її група симетрій одноелементна та тотожність комутативності, група симетрій якої двоелементна. Об'єднавши ці дві групи симетрій, отримуємо, що пучок є односторонньо симетричним, група симетрій якого двоелементна. □

Результат для парастрофів тотожності комутативності отриманий Стейном в 1957 році [23].

Твердження 15. *Многовид, що визначається тотожністю (35), тотально симетричний.*

Доведення. В системі тотожностей (35) є тотожність ідемпотентності та тотожності напів симетричності, група симетрій кожної з них одноелементна, тому об'єднавши їх отримуємо теж одноелементну групу симетрій, яка означає, що пучок є тотально симетричним. □

Результат для парастрофів тотожності напів симетричності отриманий різними авторами в різні роки, наприклад, Дж. Смітом, Білоусовим, Крапєжем та іншими.

Твердження 16. *Нехай многовид $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю (36), тоді його парастрофи визначаються кожною із тотожностей, що зазначені у відповідному рядку:*

$$\mathfrak{A}: \quad yx^2 \cdot y = x, \tag{65}$$

$$^{s}\mathfrak{A}: \quad y \cdot x^2 y = x, \tag{66}$$

$$^{\ell}\mathfrak{A}: \quad xy(x \overset{\ell}{\cdot} x) = y, \quad (xy \overset{r}{\cdot} y)x = x \tag{67}$$

$$^{r}\mathfrak{A}: \quad x(yx \cdot y) = x; \tag{68}$$

$$^{s\ell}\mathfrak{A}: \quad (y \cdot xy)x = x; \tag{69}$$

$$^{sr}\mathfrak{A}: \quad (x \overset{r}{\cdot} x)yx = y, \quad x(y \overset{\ell}{\cdot} yx) = x. \tag{70}$$

Доведення. Аналогічне Твердженню 8.. □

Твердження 17. *Нехай многовид $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю (37), тоді його парастрофи визначаються кожною із тотожностей, що зазначені у відповідному рядку:*

$$ {}^{s}\mathfrak{A} \quad \textit{тотожністю} \quad x^2y\cdot x = y; \tag{71}$$
$$ {}^{\ell}\mathfrak{A} \quad \textit{тотожністю} \quad x(yx\cdot y) = yx\cdot y; \tag{72}$$
$$ {}^{r}\mathfrak{A} \quad \textit{тотожністю} \quad x(y\cdot xy) = x; \tag{73}$$
$$ {}^{s\ell}\mathfrak{A} \quad \textit{тотожністю} \quad (yx\cdot y)x = x; \tag{74}$$
$$ {}^{sr}\mathfrak{A} \quad \textit{тотожністю} \quad (y\cdot xy)x = y\cdot xy. \tag{75}$$

Доведення. Аналогічне до попереднього Твердження. □

Твердження 18. *Нехай многовид $\mathfrak{A}$ визначається тотожністю (38), тоді його парастрофи визначаються кожною із тотожностей, що зазначені у відповідному рядку:*

$$ {}^{s}\mathfrak{A}: \quad yx\cdot x^2 = y, \tag{76}$$
$$ {}^{\ell}\mathfrak{A}: \quad xy\cdot yx = yx, \tag{77}$$
$$ {}^{r}\mathfrak{A}: \quad x\cdot(x\overset{r}{\cdot}x)y = y; \quad x(y\overset{\ell}{\cdot}xy) = x, \tag{78}$$
$$ {}^{s\ell}\mathfrak{A}: \quad y(x\overset{\ell}{\cdot}x)\cdot x = y, \quad (yx\overset{r}{\cdot}y)x = x, \tag{79}$$
$$ {}^{sr}\mathfrak{A}: \quad xy\cdot yx = xy, \quad . \tag{80}$$

Доведення. Аналогічне до попереднього Твердження. □

Пучки тотожностей виду (19)

Твердження 19. *Узагальнена тотожність (19) визначає три пучки асиметричних многовидів, які подані в такій таблиці:*

Парастрофні многовиди	*Пучок (39)*	*Пучок (40)*	*Пучок (41)*
$\mathfrak{A}$	$x^2\cdot x = y^2$	$(x^2\cdot x)y = y$	$(x\cdot x^2)y = y$
${}^{s}\mathfrak{A}$	$x\cdot x^2 = y^2$	$y(x\cdot x^2) = y$	$y(x^2\cdot x) = y$
${}^{\ell}\mathfrak{A}$	$(y\overset{\ell}{\cdot}y)x\cdot x = x$	$(y^2\cdot x)x = x$	$y^2\cdot(x\overset{\ell}{\cdot}x) = x$
${}^{r}\mathfrak{A}$	$(x\overset{r}{\cdot}x)(y\overset{r}{\cdot}y)=x$	$((x\overset{r}{\cdot}x)\overset{r}{\cdot}x)y=y$	$(x\overset{r}{\cdot}(x\overset{r}{\cdot}x))y=y$
${}^{s\ell}\mathfrak{A}$	$x\cdot x(y\overset{r}{\cdot}y) = x$	$y(x\overset{\ell}{\cdot}(x\overset{\ell}{\cdot}x))=y$	$y((x\overset{\ell}{\cdot}x)\overset{\ell}{\cdot}x)=y$
${}^{sr}\mathfrak{A}$	$(y\overset{\ell}{\cdot}y)(x\overset{\ell}{\cdot}x)=x$	$x(x\cdot y^2) = x$	$(x\overset{r}{\cdot}x)\cdot y^2 = x$

Доведення. Легке та очевидне. В таблиці твердження в одній довільній комірці розташовано рівносильні тотожності. В двох довільних комірках одного стовпчика знаходяться парастрофні тотожності. В різних рядках одного довільного стовпця розміщені парастрофно-рівносильні тотожності, які визначають один пучок многовидів, де рядки показують парастрофні многовиди квазігруп. □

Пучки тотожностей виду (20)

Твердження 20. *Узагальнена тотожність (20) визначає три пучки многовидів, які подані в такій таблиці, два з яких односторонньо симетричні, а один – асиметричний:*

Парастрофні многовиди	*Пучок (42)*	*Пучок (43)*	*Пучок (44)*
$\mathfrak{A}$	$x^2 \cdot x^2 = x$	$(x^2 \cdot x)x = x$	$(x \cdot x^2)x = x$
${}^s\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$x(x \cdot x^2) = x$	$x(x^2 \cdot x) = x$
${}^\ell\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$	$x^2 \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} x) = x$
${}^r\mathfrak{A}$	$x(x \overset{\ell}{\cdot} x) \cdot x = x$	$((x \overset{r}{\cdot} x) \overset{r}{\cdot} x)x = x$ $x(x \overset{\ell}{\cdot} (x \overset{\ell}{\cdot} x)) = x$	$(x \overset{r}{\cdot} (x \overset{r}{\cdot} x))x = x$
${}^{s\ell}\mathfrak{A}$	${}^\ell\mathfrak{A}$	${}^r\mathfrak{A}$	$x((x \overset{\ell}{\cdot} x) \overset{\ell}{\cdot} x) = x$
${}^{sr}\mathfrak{A}$	${}^r\mathfrak{A}$	${}^s\mathfrak{A}$	$(x \overset{r}{\cdot} x) \cdot y^2 = x$

Доведення. Легке та очевидне. Характеристика таблиці даного твердження аналогічна характеристиці таблиці попереднього твердження. □

9. Підсумковий результат статті

Теорема 8. *З точністю до парастрофно-первинної рівносильності всі квазігрупові узагальнені тотожності довжини три визначають 78 різних многовидів, які розприділені в 20 пучків квазігрупових многовидів, з них:*
4 – тотально симетричних;
10 – асиметричних;
6 – односторонньо симетричних;
Напів симетричних пучків немає.

Доведення. Доведення ґрунтується на доведеннях теорем 4., 5., 6., 7., як класифікації кожного узагальненого класу тотожностей на пучки та відповідних твердженнях, як класифікаці тотожностей в кожному пучку многовидів. □

Висновки

Наукове дослідження спрямоване на теоретичне вивчення актуальної проблеми систематизації результатів вітчизняних, зарубіжних авторів та власних теоретичних досліджень автора в області оборотних функцій (квазігруп і латинських квадратів) та в теорії функційних рівнянь і тотожностей, отриманих методом парастрофної симетрії.

Проведено ретельний літературний пошук вітчизняних і зарубіжних джерел, зроблено огляд та аналіз знайденої інформації, вивчено метод парастрофної симетрії в теорії оборотних функцій. Систематизувано отримані власні математичні результати під єдиним кутом зору, а саме

1)) класифіковано узагальнені функційні рівняння довжини три, в результаті отримано 4 різних класи, завершено повну систематизацію результатів розв'язування отриманих парастрофно-первинно нерівносильних функційних рівнянь довжини три на множині оборотних двомісних функцій;

2) в квазігрупових тотожностях довжини три можливі дві незалежні предметні змінні, з появами (2;2), (3;2), (4;0), (5;0), дано повну класифікацію цих тотожностей і відповідних їм многовидів враховуючи групи їх симетрій, результати подані в Таблицях в додатках;

3) для прикладів наведено класифікацію тотожностей за групами парастрофної симетрії, в результаті отримано 20 різних пучків многовидів квазігруп, як наслідок доповнено результати класифікації функційних рівнянь інших авторів (В.Д.Білоусова, Р.Ф.Коваль, А.Крапєжа, Ф.М. Сохацького та інших).

References

[1] Aczél J Lectures on Functional Equations and their applications. // New York: Acad. press. — 1966. — P. 510.

[2] Aczél J., Belousov V.D., Hosszú M., Generalized associativity and bisymmetry on quasigroups // Acta. Math. Acad. Sci. Hung. — 11/1-2. — 1960. — C. 127–136.

[3] Белоусов В.Д., Ассоциативные системы квазигрупп //Успехи мат. наук. — 13, 3(81). — 1958. — C. 243.

[4] Белоусов В.Д. Системы квазигрупп с обобщёнными тождествами. // УМН. — Т. 20. — 1965. — N 1(121). — C. 75–146.

[5] Белоусов В.Д. Уравновешенные тождества в квазигруппах // Мат. сб. — Т.70. — 1966. — N. 1(112). — C. 55–97.

[6] Белоусов В.Д. Парастрофно-ортогональные квазигруппы // Препринт Акад. наук Молдавской ССР, Изд. Штиинца, Кишинев. — 1983. — 50 с.

[7] Belousov V. D. Parastrophic-orthogonal quasigroups // Quasigroups and Related Systems, 13. — 2005. — P. 25–72.

[8] G.B. Belyavskaya, T.V. Popovich Conjugate sets of loops and quasigroups. DC-quasigroups, Buletinul Academiei de tiine a Republicii Moldova. — **1**(68). — 2012. — P. 21–31.

[9] Benett F.E. The spectra of a variets of quasigroups and related combinatorial designs // Descrete Mathematics, North-Holland, 77. — 1989. — P. 29–50.

[10] Evans T. A note on the associative law. // Journal London Math. Soc. — N. 25.1950. — P. 196–201.

[11] Коваль Р. Ф., Класифікація функційних рівнянь малої довжини на квазігрупових операціях// дисер. на здобуття наук. ступ. канд. фіз.-мат. наук, Вінниця, 2005.

[12] Крайнічук Г.В. Класифікація та розв'язання квазігрупових функційних рівнянь типу (4;2) // Вісник ДонНУ, серія А: природничі науки. — N. 1–2. — 2015. — C. 53–63.

[13] Krapež A., Živković D., Parastrophically equivalent quasigroup equations // Publications de L'Institut Mathematique, Nouvelle serie. — 87(101). — 2010. — P. 39–58.

[14] Krapež A., Simić S. K., Tošić D. V., Parastrophically uncancellable quasigroup equations // Aequat. Mathem. — 79. — 2010. — P. 261–280.

[15] Krstić S., Quadratic quasigroup identities (Serbocroatian) // PhD thesis, University of Belgrade. — 1985.

[16] Kuczma M. Functional equations in a single variable. — Warszawa: PWN. — 1968.

[17] Movsisyan Yu.M., Hyperidentities and Related Concepts, I. Arm. J. Math. 2. — 2017. — P.144–222.

[18] Popovych T. On conjugate sets of quasigroup. Bulentinul Academiei de Stiinte a Repablicii Moldova. Mathematica. — 3(67). — 2011. — P. 69–76.

[19] Sade A. Quasigroupes obeissant a certains lois// Rev. Fac. Sci. Univ. Istambul, 2. — 1957. — P. 151–184.

[20] Sade A. Produit direct-singulier de quasigroupes orthogonaux et anti-abéliens. // Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sér. I, 74. — 1960. — P. 91–99.

[21] Сохацький Ф.М. Класифікація функційних рівнянь на квазігрупах// Український

математичний журнал. — Т. 56. — N4. — 2004. — С. 1259–1266.
[22] Sokhatsky F.M. Parastrophic symmetry in quasigroup theory // Visnyk DonNU, A: natural Sciences. — N. 1–2. — 2016. — P. 70–83.
[23] Stein Sh.K. On the foundations of quasigroups // Trans. Amer. Soc. — 1957. — Vol.85. — N 1. — P. 228–256.

Halyna Krainichuk

Senior Lecturer of the Department of Mathematical Analysis and Differential Equations, Vasyl' Stus Donetsk National University

CLASSIFICATION OF BINARY QUASIGROUP FUNCTIONAL EQUATIONS AND IDENTITIES OF THE LENGTH THREE

SUMMARY

In this paper, the generalized functional equations of length three are classified into 4 different classes up to parastrophically-primary equivalence. Using the parastrophic symmetry method, generalized parastrophic identities up to equivalence that define parastrophic varieties are classified. As a result, 20 different varieties that are solutions of the corresponding functional equations are obtained.

Key words: *invertible operation (quasigroup), parastrophe, loop, isotope, identity, functional equation, equivalence, parastrophic symmetry.*

Галина Крайничук

ст. преподаватель каф. математического анализа и дифференциальных уравнений, Донецкий национальный университет имени Василя Стуса

КЛАССИФИКАЦИЯ БИНАРНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ТОЖДЕСТВ ДЛИНЫ ТРИ

РЕЗЮМЕ

В этой статье классифицированы обобщенные функциональные уравнения длины три, в результате получено 4 разных класса с точностью к парастрофно-первичной эквивалентности. С использованием метода парастрофной симметрии классифицированы обобщенные парастрофные тождества с точностью к эквивалентности, которые определяют парастрофные многообразия, в результате получено 20 различных многообразий, которые являются решениями соответствующих функциональных уравнений.

Ключевые слова: *обратимая операция (квазигруппа), парастроф, лупа, изотоп, тождество, функциональное уравнение, эквивалентность, парастрофная симметрия.*