УДК 512.548.7

Крайнічук Г.В., Акопян А.С.

[1] **ст. викладач каф. математичного аналізу і диференціальних рівнянь,**
[2] **аспірант 2 курсу каф. математичного аналізу і диференціальних рівнянь,**
Донецький національний університет імені Василя Стуса

ПОДАННЯ ФУНКЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ЧЕРЕЗ ГРАФИ

У статті описується відповідність між графами Крстича та узагальненими квадратичними квазігруповими функційними рівняннями від чотирьох функційних змінних, показана класифікація цих рівнянь з точністю до парастрофно-первинної рівносильності та відповідних до них графів з точністю до ізоморфізму.

Ключові слова: *квазігрупа, функційне рівняння, мультиграф, граф Крстича, парастроф, рівносильність, ізоморфізм, парастрофно-первинна еківалентність.*

Вступ

В даній статті продовжується вивчення узагальнених квадратичних функційних рівнянь на оборотних (квазігрупових) функціях, які вивчалися досить багатьма авторами в різний час [1, 9, 10, 8, 5, 2, 12].

Функційне рівняння називається:

- *чистим,* якщо в ньому не має ні предметних, ні функційних сталих [12];
- *узагальненим,* якщо всі функційні змінні у рівнянні різні [5];
- *квадратичним,* якщо кожна предметна змінна має точно дві появи [5];
- *бінарним,* якщо всі функційні змінні є бінарними операціями [1];
- *квазігруповим,* якщо передбачається, що кожна функційна змінна набуває значень в множині квазігрупових операцій довільного носія [12].

В.Д. Білоусов [1], А.М. Чебан [5] та інші вивчали квазігрупові функційні рівняння з точністю до еквівалентності. Методом для класифікації узагальнених квазігрупових функційних рівнянь є парастрофно-первинна рівносильність, означення якої вперше було сформульоване Ф. Сохацьким [2], завдяки чому стало можливим довести не тільки парастрофно первинну рівносильність, а й нерівносильність двох функційних рівнянь.

В свою чергу, С. Крстич і А. Крапєж вивчали залежність між узагальненими квазігруповими функційними рівняннями і тризв'язними графами. А. Крапєж у статті [10] досліджував узагальнені квадратичні функційні рівняння на квазігрупах. У дисертації Сави Крстича [11] доведена теорема про те, що у бінарному випадку квадратичні функційні рівняння на квазігрупах можна представити у вигляді мультиграфів.

Бінарні узагальнені квадратичні квазігрупові функційні рівняння можуть бути зображені у вигляді 3-зв'язних графів [11]. Побудова 3-зв'язних графів описана в [6]. У статті Александара Крапєжа [8] наведено класифікацію неізоморфних графів Крстича від 2 вершин і 4 ребер та від 4 вершин і 6 ребер, які відповідають узагальненим квадратичним функційним рівнянням з двома та чотирма функційними змінними. Рівняння та відповідні графи можна побачити в Таблиці 1, п.1-2.

З точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує точно два бінарних узагальнених квадратичних функційних рівнянь з двома функційними змінними та існує точно п'ять бінарних узагальнених квадратичних функційних рівнянь з чотирма функційними змінними [8].

У дисертації Р. Коваль (див. 1.4, 1.5, 2.10, 2.13, 2.17, 2.21-2.26, 2.28-2.33 в [9]) досліджено та виділено 17 бінарних узагальнених квазігрупових квадратичних функційних рівнянь з шістьма функційними змінними з точністю до парастрофно-первинної рівносильності.

Метою досліження в цій статті є зображення бінарних узагальнених квадратичних вазігрупових функційних рівнянь від шести функційних змінних, використовуючи метод подання функційних рівнянь через 3-зв'язні мультиграфи.

У цій статті, наведено вигляди неізоморфних графів, що відповідають кожному отриманому Р. Коваль рівнянню від шести функційних змінних (табл. 1, п.3) та встановлено класифікацію бінарних узагальнених квадратичних вазігрупових функційних рівнянь від шести функційних змінних з точністю до парастрофно-первинної рівносильності.

1. Основні означення та результати

Нагадаємо означення оборотної функції:

Означення 1. *Оборотною називається функція* f, *якщо для всіх* $a, b \in Q$ *існують єдині розв'язки рівнянь* $f(x,a) = b$, $f(a,y) = b$, *а пара* $(Q; f)$ *називається квазігрупою [1].*

Означення 2. *Функційним рівнянням [12] є універсальне замикання рівності двох термів, яке можна показати такою формулою* $T_1 = T_2$, *де* n *— кількість різних предметних змінних, що входять в запис термів* T_1 *і* T_2, *причому терми* T_1 *і* T_2 *визначені над алфавітами:*

$\{F_1, F_2, \dots\}$ *— множина функційних змінних;*

$\{x_1, x_2, \dots\}$ *— множина предментних змінних.*

Нагадаємо, що два функційні рівняння називаються *парастрофно первинно рівносильними* [2], якщо від одного до іншого можна перейти за скінченну кількість таких кроків:

- застосування таких гіпер-тотожностей [10]:

$$^{l}F(F(x,y);y) = x; \qquad F(^{l}F(x,y);y) = x;$$

$$^{r}F(x,F(x,y)) = y; \quad F(x,{}^{r}F(x,y)) = y;$$

- перейменування предметних змінних;
- перейменування функційних змінних;
- заміна частин рівняння місцями ($\omega = \upsilon$ на $\upsilon = \omega$).

2. Метод побудови неізоморфних графів Крстича

Означення 3. *Мультиграф [5] — це трійка* (V, E, I), *де* V *та* E *— неперехресні множини, елементи яких називаються вершинами та ребрами відповідно, а* I *— це інцидентне відношення* $I \subseteq V \times E$. *Ребро називається петлею, якщо його кінці збігаються, тобто* $e = \{v, v\}$. *Граф* G *називається планарним, якщо його можна представити точками (вершини) і лініями (ребра) в евклідовій площині, так що лінії перетинаються лише на вершинах.*

Мультиграф називається *графом Крстича* тоді і тільки тоді, коли він задовольняє таким умовам:

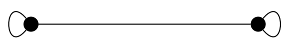
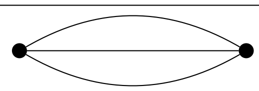
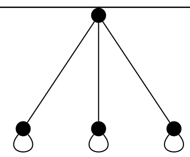
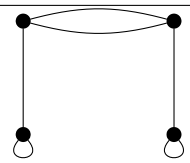
- є кубічним (тобто з кожної вершини виходить три ребра);
- є 3-зв'язним (тобто всі його вершини 3-зв'язні між собою);
- існує додатнє ціле число n таке, що кількість вершин $|V| = 2n$ і кількість ребер $|E| = 3n$.

Відповідно до статті Крапєжа і Живковіча [5], граф Крстича, який відповідає узагальненому квадратичному функційному рівнянню будується таким чином:

1. Вершинами графа є відповідні функційні змінні рівняння $\omega = \upsilon$;
2. Ребрами графа є підтерми з ω та υ, в тому числі й самі ω та υ, які вважаються одним ребром, фнакше кажучи, будь-яка предметна змінна вважається одним ребром;
3. Якщо $A(p, q)$ є підтермом ω або υ, то вершина F інцидентна ребрам $p, q, F(p, q)$, інших ребер немає.

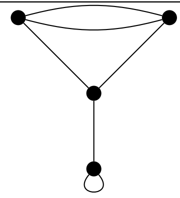
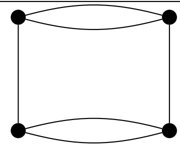
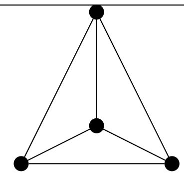
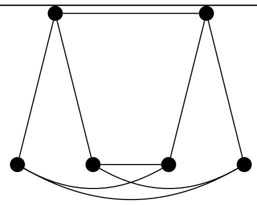
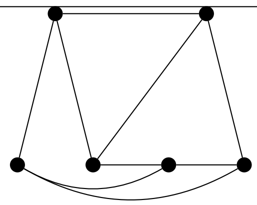
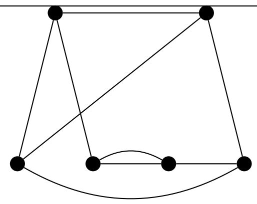
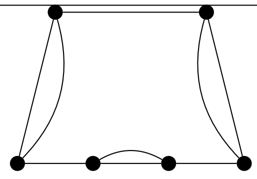
Теорема 1. *[7]. Узагальнені квадратичні квазігрупові функційні рівняння є первинно-парастрофно рівносильними тоді і тільки тоді, коли їх відповідні мультиграфи є ізоморфними.*

Таблиця 1: Класифікація бінарних функційних рівнянь та відповідних графів

№	**Кількість функційних змінних**	**Функційне рівняння**	**Граф**
1	2 функційні змінні	$F_1(x, x) = F_2(y, y)$	
		$F_1(x, y) = F_2(x, y)$	
2	4 функційні змінні	$F_1(F_2(x, x), F_3(y, y)) = F_4(z, z)$	
		$F_1(F_2(x, x), z) = F_3(F_4(y, y), z)$	

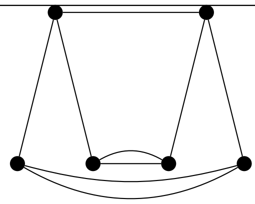
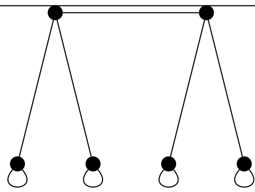
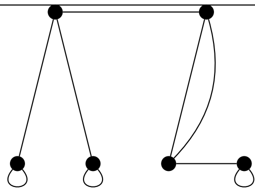
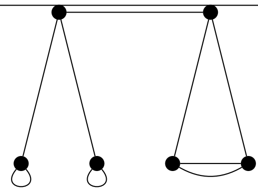
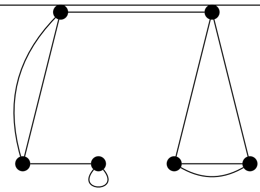
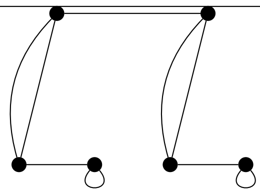
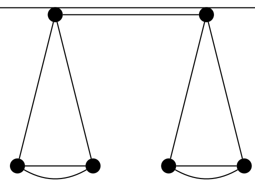
Продовження на наступній сторінці

Таблица 1 – *Продовження з попередньої сторінки*

№	Кількість функційних змінних	Функційне рівняння	Граф
		$F_1(F_2(F_3(x,x),y)) = F_4(y,z)$	
		$F_1(F_2(x,y),z)) = F_3(F_4(x,y),z)$	
		$F_1(F_2(x,z),y)) = F_3(F_4(x,y),z)$	
3	6 функційних змінних	$F_1(F_2(x,y),F_3(u,v)) =$ $= F_4(F_5(x,u),F_6(y,v))$	
3	6 функційних змінних	$F_1(F_2(x,y),F_3(z,u)) =$ $= F_4(F_5(F_6(x,z),y),u)$	
		$F_1(F_2(x,y);F_3(z,u)) =$ $= F_4(F_5(F_6(x,y),z),u)$	
		$F_1(F_2(F_3(x,y),z),z) =$ $= F_4(F_5(F_6(x,y),u),u)$	

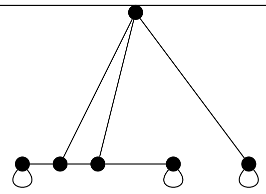
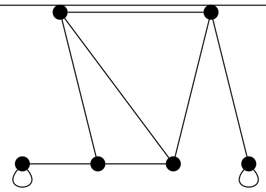
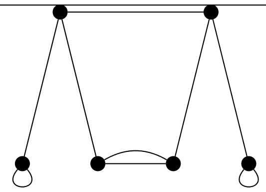
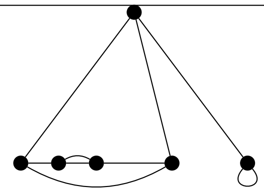
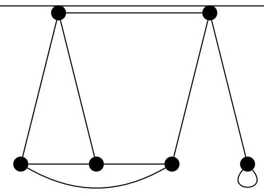
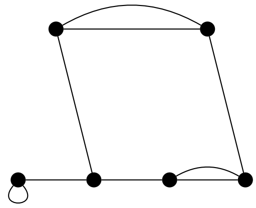
Продовження на наступній сторінці

Таблиця 1 – *Продовження з попередньої сторінки*

№	**Кількість функційних змінних**	**Функційне рівняння**	**Граф**
3	6 функційних змінних	$F_1(F_2(x,y),F_3(z,u)) =$ $= F_4(F_5(x,y),F_6(z,u))$	
		$F_1(F_2(x,x),F_3(y,y)) =$ $= F_4(F_5(z,z),F_6(u,u))$	
		$F_1(F_2(x,x),F_3(y,y)) =$ $= F_4(F_5(F_6(z,z),u),u)$	
		$F_1(F_2(x,x),F_3(y,y)) =$ $= F_4(F_5(z,u),F_6(z,u))$	
		$F_1(F_2(F_3(x,x),y),y) =$ $= F_4(F_5(z,u),F_6(z,u))$	
		$F_1(F_2(F_3(x,x),y),y) =$ $= F_4(F_5(F_6(z,z),u),u)$	
		$F_1(F_2(x,y),F_3(x,y)) =$ $= F_4(F_5(z,u),F_6(z,u))$	

Продовження на наступній сторінці

Таблиця 1 – *Продовження з попередньої сторінки*

№	Кількість функційних змінних	Функційне рівняння	Граф
3	6 функційних змінних	$F_1(F_2(F_3(x,x),y),F_4(y,F_5(z,z))) =$ $= F_6(u,u)$	
		$F_1(F_2(F_3(x,x),y),z) =$ $= F_4(F_5(y,z),F_6(u,u))$	
		$F_1(F_2(x,x),F_3(y,z)) =$ $= F_4(F_5(y,z),F_6(u,u))$	
		$F_1(F_2(F_3(x,y),z),F_4(F_5(x,y),z)) =$ $= F_6(u,u)$	
		$F_1(F_2(x,y),z) =$ $= F_3(F_4(x,F_5(y,z)),F_6(u,u))$	
		$F_1(F_2(F_3(x,y),F_4(u,u)),z) =$ $= F_5(F_6(x,y),z)$	

Теорема 2. *Існує точно*
– 2 неізоморфних графи Крстича від двох вершин [8],
– 5 неізоморфних графів Крстича від 4 вершин [8]
– 17 неізоморфних графів Крстича від 6 вершин.

Висновки

Кожен з графів в п.3 табл. 1 має 6 вершин і кожному відповідає рівняння від шістьох функційних змінних. Згідно з означенням, а також як видно з рисунків, графи не є ізоморфними, бо зв'язки між вершинами в кожному з них є різними, тобто усі 17 рівнянь справді є парастрофно-первинно нерівносильними, що підтверджує отриманий результат у дисертації Коваль.

References

[1] Белоусов В.Д. *Основы теории квазигрупп и луп.* — М.: Наука, 1967. — 222 с.

[2] Cheban A.M. *Systems of quasigroups with a generalized Moufang identity* (Russian), Mat. Research. — 1971. — T.VI, 3, — Chisinau. — pp. 180-187.

[3] Krapež A. *Strictly quadratic functional equations on quasigroups / A.Krapež //* Publ.Inst.Math. — 1981 — №29(43). — P.125-138.

[4] Krstić S. *Quadratic quasigroup identities (Serbian).* — University of Belgrade, 1985. — 133 p

[5] Krapež A., Živković D. *Parastrophically equivalent quasigroup equations.* — L'institut Mathematique, 2010. — tome 87(101) — pp. 39-58.

[6] Bussemaker F. C., Cobeljic, S., Cvetkovic, D. M. C*omputer investigations of cubic graphs.* — T.H. — Report 76-WSK-Ol — 1976. ž

[7] Krapež A., Simić S. *Parastrophically uncancellable quasigroup equations.* — Aequationes Mathematicae, 2010. — p. 20.

[8] Krapež A. *Generalized quadratic quasigroup equations with three variables.* — Quasigroups and Related Systems, 2009. — 17 — pp. 253-270.

[9] Коваль (Юрій) Р.Ф. *Класифікація функційних рівнянь малої довжини на квазігрупових операціях (дис.).* — ВДПУ ім. М. Коцюбинського, 2005. — 133 с.

[10] Movsisyan Yu.M., *Hyperidentities and Related Concepts, I*, Arm. J. Math. 2(2017), pp.144-222.

[11] Сохацький Ф.М. *Про класифікацію функційних рівнянь на квазігрупах* / Ф.М. Сохацький // Український математичний журнал. — 2004.— Т. 56, № 9. — С. 1259-1266.

[12] Sokhatsky Fedir M. *Parastrophic symmetry in quasigroup theory.* — Bulletin of Donetsk National University. Series A (Natural Sciences), 2016. — №1-2. — pp. 72-85.

Krainichuk H.V., Akopyan A.S.

[1] *senior lecturer,* [2] *PhD student of the 2nd year of*
the Department of Mathematical Analysis and Differential Equations,
Vasyl' Stus Donetsk National University

REPRESENTATION OF FUNCTIONAL EQUATIONS BY GRAPHS

SUMMARY

In the article, the correspondence between the Krstic graphs and the generalized quadratic quasigroup functional equations in the four functional variables is described. The classification of these equations up to the parastrophically-primary equivalence and corresponding to them graphs up to the isomorphism is given.

Key words: *quasigroup, invertible function, functional equation, multigraph, Krstic graph, parastrophe, equivalence, isomorphism, parastrophically-primary equivalence.*

Крайничук Г.В., Акопян А.С.

[1] *старший преподаватель,* [2] *аспирант 2 курса кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, Донецкий национальный университет имени Васыля Стуса*

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕРЕЗ ГРАФЫ

РЕЗЮМЕ

В статье описываются соответствия между графам Крстыча и обобщеными квадратичными функциональными квазигрупповыми уравнениями от четырех фунциональных переменных, дана полная классификация этих уравнений с точностью к парастрофно-первичной эквивалентности и соответствующих графов с точностью к изоморфизма.

Ключевые слова: *квазигруппа, обратимая функция, функциональное уравнение, мультиграф, граф Крстича, парастроф, єквивалентность, изоморфизм, парастрофно-первичная єквивалентность.*