УДК 512.548

Галина Орлик-Плюкфельдер

Переклад з англійської Ф.М. Сохацького та В.Д. Обшанської для кращого розуміння молодих математиків, які працюють в теорії квазігруп, луп та латинських квадратів, а також алгебри, геометрії, топології та комбінаторики.

ІСТОРИЧНІ НОТАТКИ З ТЕОРІЇ ЛУП

Ця стаття розглядає походження теорії луп і ранню її історію, охоплюючи період з 20-х по 60-ті роки 20-го століття.

Ключові слова: *група, лупа, квазігрупа, ізотоп, ґратка, асоціативність, історія математики, алгебра, геометрія, топологія, комбінаторика*

Вступ

Ця стаття є спробою не лише відобразити та впорядкувати джерела походження теорії луп, узгодивши між собою хронологічно та географічно, а і висвітлити різноманітні галузі науки, де зароджувалися основні поняття та ставились рушійні проблеми її розвитку. 70 років розвитку теорії луп є порівняно невеликим періодом в порівнянні, скажімо, з 300-літнім розвитком диференціального числення. Оскільки теорія луп є відносно молодою галуззю математики, її часто неправильно інтерпретують. Саме тому надзвичайно важливо знати особливості її походження.

На питання "Що таке лупа?", найпростіша відповідь така: це група без асоціативності. І це правильно, але така відповідь не повна. Важливо відмітити, що теорія луп не є узагальненням лише теорії груп, але є самодостатньою галуззю, що має принаймні чотири джерела походження і розвитку: алгебра, геометрія, топологія і комбінаторика.

Озираючись на перші 50 років розвитку теорії луп, можна побачити, що кожні 10 років спричинювали нову важливу фазу її розвитку. Ці періоди можна підсумувати так:

1. 20-ті роки XIX ст. — поява перших ідей неасоціативності.
2. 30-ті роки XIX ст. — визначальний період (Німеччина);
3. 40-60-ті роки — побудова базового алгебричного каркасу і нових підходів до проективної геометрії (США);
4. 50-60-ті роки — повернення луп до Західної Європи (Англія, Франція, Німеччина, Нідерланди і Італія);
5. 60-ті роки — зростання розвитку теорії луп в Радянському Союзі.

Кожний з періодів 2)–5), зображений в літературі класичною книгою цієї епохи, яка до сьогоднішнього дня залишається основним довідником відповідної галузі.

2. Blaschke and Bol "Geometry of Webs" 1938 (German)
3. Bruck "A Survey of Binary Systems" 1958 (English)
4. Pickert "Projective Planes" 1955 (German)
5. В. Д. Белоусов "Основы теории квазигрупп и луп" 1967

Однією з цілей цієї статті є висвітлення вмотивованих першопричин появи перших публікацій з теорії квазігруп Муфанг і Бола. Події тих років є надто віддаленими у часі для багатьох людей, щоб отримати інформацію з перших рук або почути її від свідків. Але з іншого боку ці події є досить недавніми, щоб можна було їх знайти в книжках з історії математики або навіть на нових математико-історичних веб-сторінках.

Давайте розпочнемо з періоду I, або точніше з передісторії неасоціативності.

1920-ті роки — перші ідеї неасоціативності

В історії науки відомо багато випадків, коли революційні ідеї витали в повітрі, аж поки вони не були впровадженні в різних місцях, інколи незалежно і в різних формах.

Протягом останніх двох століть, два таких видатних випадки сталися в математиці і фізиці. Гіперболічна геометрія була відкрита майже одночасно Лобачевським та Болйаї (Bolyai) в 1820-х роках і надалі були поєднані з геометрією Рімана (повідомлено в 1866 році), щоб створити неевклідову геометрію. Так само, на межі 20-го століття цілком нове поняття простору і часу з'явилося з перетворень Лоренца 1895, яке замінило раніше визначене поняття Гелілея, і спеціальну теорію відносності Енштейна, 1905. Тепер нам відомо, що ці дві ідеї, неевклідова геометрія та криволінійне поняття простору і часу, не є цілком не зв'язаними між собою і обидві ідеї допомогли підготувати ґрунт для поняття неасоціативності.

Найстаріша неасоціативна операція, яка використовувалась людством — це віднімання натуральних чисел. Але найпершим прикладом абстрактної неасоціативної системи були числа Келлі, побудовані Артуром Келлі (Arthur Cayley) в 1845 році. Пізніше вони були узагальнені Діксоном (Dickson) і тепер відомі як алгебри Келлі-Діксона. Вони стали предметом посиленого вивчення в 20-их роках, оскільки вони відіграють визначну роль в будові альтернативних кілець.

Іншим класом неасоціативних структур була система з однією бінарною операцією. Однією з найперших публікацій, в якій розглядались неасоціативні бінарні системи, була праця А.К.Сушкевича (1929) "Про узагальнення асоціативного закону". На той час Сушкевич був професором математики у Воронежі.

У своїй статті Сушкевич відмічає, що в доведенні теореми Лагранжа для груп можна не використовувати асоціативний закон. Він робить справедливе припущення, що можна мати неасоціативну бінарну систему, яка б задовольняла властивості Лагранжа. Він будує два типи так званих "узагальнених груп ", які задовольняють постулату A або постулату B. У підході Сушкевича можна визначити деякі ранні і підходи в напрямку сучасної теорії луп як узагальнення теоретико-групових понять. Його "узагальнені групи"можна розглядати як попередники такої сучасної теорії квазігруп як ізотопи груп.

Нажаль ідеї Сушкевича не були визнаними в свій час в його країні. Нещадний період політичних репресій у 30-ті роки XX ст. настав у СРСР і уряд вважав Сушкевича політично ненадійним. Він походив з дрібного російського дворянства. І що найгірше, він вивчав математику в Берліні до революції, і опублікував свою статтю (1929) в американському журналі. В кінці своєї викладацької діяльності в Харкові, Сушкевичу заборонили керувати написанням дисертацій — обставина, що перешкодила подальшому розвитку та поширенню його ідей. І лише в кінці 30-тих років з появою праць Медича (Murdoch) в Америці і праць Бєлоусова 1960-тих років в Росії, роботи Сушкевича знов привернули до себе увагу.

1930 — Визначальний період

Для того щоб розглянути наступний етап, ми повинні глянути на Німеччину 1930-тих років, де інтерес до теорії квазігруп зростав одночасно і в алгебрі, і в геометрії, і в топології. Традиційно геометрія була сильною в Німеччині з часів Гауса, в той час як алгебра 20-го століття була переважно британською. Однак стан німецької алгебри почав значно змінюватися з часу Гільберта і його аксіоматичного підходу до алгебри і геометрії.

До 1920-х років разом з Гетингенським університетом відносно новий Гамбургський університет ставав новим центром досліджень. Це обставина, яка зробила важливий внесок до появи квазігруп. Дослідження розвивалося декількома шляхами, які згодом переплiталися.

В цей час на алгебричну сцену виходять блискучі алгебристи з Гамбурга такі, як Еріх Гекке (Erich Hecke), учень Гільберта; Емір Артін (Emil Artin) та його учні Макс Цорн (Max Zorn) і Ганс Зеценгаус (Hans Zassenhause). Вперше алгебричний інтерес до неасоціативності, прийшов не з бінарних систем, як це було у випадку Сушкевича, а з альтернативних алгебр. Багато хто сподівався, що квазігрупи будуть корисні в математиці квантової механіки. Ці надії ніколи не були здійснені, але в процесі розвитку почала з'являтись значимість неасоціативності. Саме в цей час, Артін довів теорему, яку Муфанг пізніше використає в своїй відомій праці з теорії квазігруп.

Теорема Артина: *В альтернативній алгебрі кожні три елементи, які асоціюють відносно множення, породжують підалгебру.*

Одночасно, дослідження в геометричному напрямку слідувало принципу Гільберта про те, що геометричні аксіоми площин відповідають алгебричним властивостям їх координатизуючих систем.

Надзвичайно хвилюючі дослідження відбувалися в диференціальній геометрії. Поза сумнівом, що на той час найбільш визначною фігурою на Гамбурському математичному семінарі був Вільгельм Блашке (Wilhelm Blaschke). Його магнетична особистість і інноваційна робота в диференціальній геометрії приваблювала до нього і до його ідей багато молодих і талановитих математиків. Новою галуззю математики, яку він створював, була "геометрія ґраток". Книга Блашке з геометрії ґраток у співавторстві з Болом вийшла лише у 1938 році, але їй передували багато окремих публікацій з цього предмету, що видані ним і його послідовниками, включаючи 66 статей серії "Ґратки та групи". Лише Бол написав 14 статей до цієї серії. Серед найперших були статті Томсена (Thomsen) і Райдемайстра (Reidemeister), чиї імена нам відомі з відповідної ґраткової конфігурації. Заголовок цієї серії "Ґратки та групи" з підзаголовком "Топологічні питання диференціальної геометрії" також значимий, оскільки він чітко поєднав три основні галузі, з яких виникла теорія луп: геометрію, алгебру і топологію. Топологічний аспект з'явився з таких питань як лінеарізація: чи існує єдине топологічне перетворення, яке відображає ґратку кривих у лінійну ґратку. Бол, серед інших, зробив важливий внесок до цієї галузі дослідження.

З цієї точки зору теорії луп всі ці події завершилися появою двох статей Рут Муфанг (Ruth Moufang) "Zur Struktur von Alternativkoerpern" (1935) та Геріта Бола (Gerrit Bol) "Gewebe und Gruppen" (1937), в яких визначено два найважливіші класи луп, які тепер нам відомі як лупи Муфанг та лупи Бола. Ці дві статті разом стали формальним початком теорії луп.

Спочатку ми розглянемо статтю Муфанг, яка мотивована публікацією Макса Цорна (Max Zorn) з альтернативних кілець, в якій Цорн використовує теорему Артіна. Муфанг починає з альтернативного поля і прагне довести теорему Артіна, користуючись лише мультиплікативною системою. Вона визначає структуру, яку називає Q^* і яка задовольняє таким постулатам:

(1), (2) замкненість, існування одиничного елементу і однозначність обернених,

(3) $\quad a(a'b) = (aa')b, (ba')a = b(a'a)$,

(4) $[a(ca)]b = a[c(ab)]$.

Вона також визначає систему $Q^{*,*}$, вірячи, що вона відрізняється від Q^*. $Q^{*,*}$ задовольняє додатковій тотожності:

(5) $(ab)(ca) = a[(bc)a]$.

Невдовзі Бол показав, що (4) спричинює (5), а Брак пізніше довів, що обидві вони рівносильні двом іншим тотожностям

(6) $[(ab)c]b = a[b(cb)]$.

Можна побачити, що систему Q^*, яка тепер відома як лупа Муфанг, можна визначити довільною тотожністю Муфанг за допомогою будь-якої тотожності (4)–(6).

Муфанг довела, що Q^* є диасоціативною, тобто підквазігрупою, що породжена довільними двома елементами є асоціативною, і довела теорему, яка є відлунням теореми Артіна, і яка тепер відома як теорема Муфанг. Вона також дає геометричну інтерпретацію теореми Артіна для проективних площин, показуючи, що проективна площина задовольняє теоремі про повний чотирикутник тоді і тільки тоді вона може бути координатизована альтернативним полем. Сьогодні ми називаємо таку площину *площиною Муфанг.*

Муфанг (1905-1977) разом з Софією Ковалевською та Еммі Ньотер (Emmy Noether) була однією з трьох жінок, які зробили собі ім'я в математиці. З феміністичної точки зору, важко не пишатися тим, що наша галузь заснована жінкою.

Муфанг, геометр, навчалась в Франкфуртському університеті, а пізніше у Кенігсберзі, де вона зазнала сильного впливу Райдемайстра. Перед статтею про квазігрупи, вона опублікувала 14 статей на геометричні теми. Здобувши ступінь доктора філософії в Кенігсберзі, Муфанг повернулась до Франкфурта з наміром зробити кар'єру науковця. Невдовзі вона була повідомлена міністром освіти Третього Рейху, що їй як жінці, не дозволяється викладати в університеті, у якому переважають чоловіки. Їй дозволяється проводити лише дослідницьку роботу. Отже, Муфанг з 1937 року працювала як промисловий математик в Корпорації Крупа. Після війни вона повернулась до Франкфуртського університету і стала у Німеччині першою жінкою-професором з математики.

Муфанг ніколи більше не публікувалась, але на щастя жила досить довго, щоб побачити плоди своєї ранньої роботи, спостерігаючи як її ім'я додається до таких понять як лупи Муфанг та площини Муфанг. На сьогодні, звичайно, є набагато більше нових гілок на "дереві" Муфанг: симетрії Муфанг, полігони Муфанг, формування Муфанг не лише в алгебрі і геометрії, а також і в інших галузях, включаючи математичну фізику.

Наступною найважливішою статтею з теорії квазігруп є стаття "Gewebe und Gruppen" Ґеріта Бола (1937), яка з'явилась двома роками пізніше статей Муфанг. Підхід Бола походить від гратко-геометричної точки зору. Він будує три нових конфігурації U_1, U_2, U_3 і ставить питання, чи замикання цих трьох фігур спричинює асоціативність. Він дає негативну відповідь і показує, що ці три фігури разом спричинюють лише закон

$$a[b(cb)] = [(ab)c]b,$$

який точно є однією із тотожностей Муфанг. Щоб продемонструвати цей факт Бол наводить приклад, який побудований Заценгаусом. Цей приклад (порядку 81) фактично був першим прикладом неасоціативної комутативної лупи Муфанг.

Надалі Бол пояснює алгебричне значення кожної із зазначених U фігур, і показує що U_1 та U_2 відповідають законам, які тепер ми називаємо правою тотожністю Бола та лівою тотожністю Бола відповідно:

$$a((bc)b) = ((ab)c)b \quad \text{та} \quad (b(cb))a = b(c(ba)).$$

Заценхаус знову був першим, хто невдовзі побудував перший приклад правої лупи Бола.

Бол також доводить наступні властивості, які випливають з U фігур:

U_1 права властивість оборотності: $(dc)c' = d$

U_2 ліва властивість оборотності: $a'(ab) = b$

U_3 анти-автоморфний закон оборотності: $(ab)' = b'a'$

Бол показує, що U_1 та U_2 разом спричинюють U_3, а коли всі три фігури замкнені, то отримуємо квазігрупу Муфанг Q^*. Бол також демонструє, що квазігрупа Муфанг Q^* задовольняє еластичному закону $b(cb) = (bc)b$.

Таким чином Бол практично роз'єднує тотожність Муфанг на дві тотожності, показуючи, що говорячи сучасною мовою, лупа є лупою Муфанг тоді і тільки тоді, коли вона є лівою і правою лупою Бола. Іронія полягала у тому, що пишучи свої роботи, Бол не знав про працю Муфанг. В зауваженнях він визнав, що її праця попалась йому на очі лише після того, коли він практично завершив написання своєї статті. Цим самим ми маємо ще один приклад одночасного розвитку подібних ідей з різних джерел.

Ні Муфанг ні Бол ніколи не поверталися до теорії квазігруп, хоча надалі Бол плідно публікувався з питань диференціальної геометрії. Коли ми запросили Бола на конференцію з луп Муфанг і луп Бола з нагоди його 70-тої річниці, яка відбувалась в Обервольфі в 1976 році, він прийшов і терпляче слухав лекцію Д.А. Робінсона (D.A.Robinson) першого математика, який серйозно розпочав вивчення луп Бола в 1960-ті роки. Проте пізніше Бол зізнався нам, що лупи, які носять його ім'я, більше не викликали в нього інтерес на відміну від археології, яка на пенсії захопила його уяву.

Після Муфанг і Бола розвиток цієї галузі в Німеччині зупинився через політичну ситуацію і початок війни. Геріт Бол (1906-1989), будучи голандцем, змушений приєднатися до голанського війська в 1940 році, і невдовзі став німецьким в'язнем війни. Проте, його наставник Блашке зумів врятувати його і він продовжував свою працю в Німеччині. З 1945 року і надалі він обіймав посаду професора в Фрайбурзі.

1940-1960 Побудова базового алебричного каркасу і нові підходи до проективної геометрії

Після занепаду вивчення квазігруп в Німеччині, саме Сполучені Штати стали новим центром дослідження у цій галузі. Чому Сполучені Штати? На це було 2 основні причини.

Першим важливим фактором було те, що багато видатних математиків змушені були покинути Німеччину, коли Гітлер прийшов до влади. Це ті, хто, або самі були євреями, або дружина чи чоловік були євреями. Серед них були Еміль Артіна, Рейнхольд Баєр (Reinhold Baer), Річард Брауера (Richard Brauer) і Макс Зорн - вчені, які вже серйозно ропочали дослідження в теорії квазігруп. Багато з них прибули до Сполучених Штатів і продовжили своє дослідження у цій галузі. Зокрема, Рейнхольд Баєр.

Іншою важливою причиною було те, що сильний інтерес до неасоціативних структур вже існував в Штатах. Зокрема в Чикагському університеті. Леонард Діксон (Leonard Dickson), чиє ім'я нам відоме з аглебри Келлі-Діксона, був викладачем в Чикаго разом зі своїм колишнім студентом Авраамом Андріаном Альбертом (Abraham Adrian Albert). Таким чином Чикаго став новим центром досліджень квазігруп в 1940-і роки XX ст. Так само як Гамбург в попередній декаді.

Крім досліджень в альтернативних алгебрах, вже було декілька американських публікацій з теорії квазігруп:

1937 Hausmann and Ore "Theory of Quasi-Groups";

1939 Murdoch "Quasi-Groups Which Satisfy Certain Generalized Associative Laws";

1940 Garrison "Quasi-Groups".

Усі три автори вже використовували термін квазігрупа у широкому розумінні, як ми це робимо зараз, а не як Q^* система Муфанг. Усі три автори припускали існування одиничного елемента. В той час як Медоч уже розглядав випадок односторонньої одиниці.

Саме в цей час термінологія теорії квазігруп зазнала історичних змін. Ставало очевидним, що необхідно розрізняти два класи квазігруп: ті що мають нейтральний елемент, і ті, в яких його немає. Необхідна була нова назва для систем з одиницею. Це сталось приблизно в 1942 році серед членів семінару Альберта в Чикаго, які запровадили слово "лупа" за аналогією Chicago Loop (Чікагська Петля). Для жителів Чикаго, термін "лупа" означає основний бізнесовий район, а також наземний поїзд, який насправді робить петлю навколо цієї частини міста.

Це був блискучий вибір у декількох значеннях. По-перше слово "лупа" римується із словом "група". По-друге, воно виражає замкненість. А по-третє, воно коротке і просте, тому воно може легко адаптуватися в різні мови. На сьогодні воно використовується в багатьох мовах із незначними змінами: наприклад DIE LOOP у німецькій мові (вперше використав Пікет), ЛУПА у російські мові. Французи, як відомо, оригінальні і не конформіські, тому французькою мовою — LA BOUCLE.

Першими публікаціями, які ввели термін "лупа", були дві дуже важливі статті Альберта, написані в 1943 році: "Quasigroups I " і "Quasigroups II". Крім нового терміну "лупа", дуже важливого аспекту статті "Quasigroups I ", було введено поняття "ізотоп квазігрупи". Невдовзі після статей Альберта з'явилися дві дуже важливі публікації Річарда Губерта Брака: Richard Hubert Bruck "Some Results in the Theory of Quasigroups" (1944) та "Contributions to the Theory of Loops"(1946). Поза сумнівом у цей американський період розвитку теорії луп, який тривав з 1940-х до 1960-х років, найважливішу роль слід визнати за Альбертом і Браком та їх школами.

Для сьогоднішнього молодого покоління, поняття школи, може видатися застарілим. У цей новий вік легкого кібер-спілкування практично кожен може спілкуватись з будь-ким, де б він не знаходився, за допомогою електронної пошти та Інтернету, ставлячи питання і, якщо пощастить, отримати відповідь чи інформацію. Але це було зовсім не так у перші дні розвитку цієї галузі, коли важливі школи надихали і сприяли розвитку нових ідей. Поняття "школа" — було не просто школою розвитку думки, але часто пов'язувалось також з сильною особистістю її лідера, і з певною географічною близькістю. В ті дні багато що залежало від усного спілкування, що могло відбуватися за допомогою дискусій за столом, під час тривалих прогулянок, походів і т.п. Були особи, такі як Блашке, школа Альберта в Чикаго або Райнголда Баєра після його повернення до Франкфурта після війни. Одна з найбільш успішних і плідних шкіл була зосереджена навколо Брака в Медісоні, штат Вісконсін.

Об'єм досліджень, проведених протягом цього періоду Албертом і Браком та їх послідовниками, є настільки об'ємним, що неможливо перерахувати всі їхні досягнення у короткій статті, або згадати всі імена не ризикуючи упустити важливі. Серед важливих тем дослідження були такі:

- теорія ізотопності — властивості ізотопних квазігруп і луп, інваріанти ізотопії, автотопізми, псевдоавтоморфізми, властивості ізотопії-ізоморфізму;

- лупи з різними властивостями оборотності — ліва, права, слабка, схрещена, автоморфна, антиавтоморфна властивості оборотності;

- базові поняття підквазігрупи, фактор множини, характеристичні властивості π та нільпотентність відносно π;
- теорія гомоморфності;
- групи підстановок на лупах — мультиплікативні групи, внутрішні підстановки і поняття А-луп, напівавтоморфізми;
- лупи Муфанг;
- комутативні лупи Муфанг;
- лупи Бола і їх підмноговид луп Брака;
- різні класи квазігруп — тотально-симетричні, дистрибутивні, абелеві, а уже через них — різні геометричні і комбінаторні системи.

Книга Брака "A Survey of Binary Systems" з'явилась у 1958 році, і навіть до сьогоднішнього дня залишається книгою, яку найчастіше цитують у текстах з теорії луп.

Можна побачити, що протягом цього періоду, з 1940-х по 1960-ті роки, було споруджено базовий алгебричний каркас теорії луп. Теорія луп отримала тверде підґрунтя, яке дозволило їй розвиватися в нових напрямках і процвітати у різних місцях. Ми пізніше повернемось до геометричних досягнень цього періоду, але спочатку розглянемо алгебричну гілку в повоєнній Західній Європі.

1950-60-ті роки повернення луп до Західної Європи

Одним із багатьох нових напрямків, у якому почала рухатись теорія луп, був універсальний алгебричний підхід. Універсальна алгебра була однією з тих "нових ідей, що витали у повітрі" протягом 1930-х років. Походячи від Емми Ньотер в Геттінгені, вона швидко поширювалась в Сполучених Штатах та Європі: В.Н. Нейман в Кембриджі, Г. Біркгоф у Гарварді і А. І. Мальцев у Радянському Союзі.

В Англії розширення цих понять до квазігруп і луп стало справою всього життя Тревора Еванса (Trevor Evans) з кінця 1940-х і надалі. Визначивши квазігрупи як алгебри з трьома операціями, включаючи ліве і праве ділення, Еванс зміг розглядати квазігрупи як многовиди Ω-алгебр, $\Omega = \{\cdot, \backslash, /\}$, і застосувати до них багато понять і знарядь універсальної алгебри.

Іншою галуззю дослідження в Англії на той час були різні класи квазігруп, наприклад, робота І. М. Н. Етерінгтона з ентропічних квазігруп, які визначаються тотожністю

$$(ab)(cd) = (ac)(bd).$$

Етерінгтон показав, що тотально симетричні ентропічні квазігрупи природно пов'язані з геометрією плоских кубічних кривих. Кубічні гіперплощини були пізніше цілком розроблені Юрієм Маніним в Радянському Союзі.

Цікаво, що класи ентропічних і ліводистрибутивних квазігруп вивчались також деякими японськими математиками, включаючи Такасакі в Харбіні ще з кінця 1930-х до початку 1940-х років, хоча у західній літературі немає про це достатньо документації.

В Англії в цей час продовжувала розвиватися інша галузь дослідження, а саме латинські квадрати. Звичайно, латинські квадрати набагато старші, ніж теорія луп. Взаємно-ортогональні латинські квадрати розвивались ще Ейлером у XVIII ст. з комбінаторної точки зору. Проте в процесі розвитку теорії луп встановлювався зв'язок між комбінаторними і деякими теоретико-груповими аспектами латинських квадратів. Наприклад, комбінаторні структури, такі як конструкції блоків або системи трійок Штейнера, можна пов'язати з алгебричними многовидами квазігруп Штейнера та тотально симетричниими лупами.

Для того, щоб навести інший приклад, Фішер (Fisher) та Йейтс (Yates,) з Англії протягом 1930-х років показали, що латинські квадрати порядку 6, належать до множини так званих "adjugates", які ми тепер називаємо "спряженими" або "оберненими" квазігруповими операціями або "парастрофами". В загальному вигляді поняття парастрофа ввів Сад (Sade) у Франції у 1950 році. Згодом на початку 1960-х років Рафаель Арці (Rafael Artzy) запровадив поняття ізострофа, як композицію ізотопа та парастрофа.

Ентоні Дональд Кідвел (Anthony Donald Keedwell), починаючи з 60-х років і надалі, вивчав багато інших зв'язків між латинськими квадратами, лупами і геометрією — наприклад між ортогональними латинськими квадратами та неополями, в чиїх структурах адитивна система є лупою.

Але давайте повернемось до геометричної гілки, розглядаючи як вона розвивалась в 1940-х роках в Сполучених Штатах і пізніше в Європі.

Сам Брак отримав геометричне підґрунтя як студент Річарда Брауера (Richard Brauer), і опублікував декілька статей з геометрії. Насправді, його математичне генеологічне дерево тягнеться аж до Гауса (Gauss) через Веєрштраса (Weierstrass), Фробеніуса (Frobenius), Шура (Schur) і Брауера (Brauer).

Але основними фігурами у галузі геометрії в Сполучених Штатах у 1940-х роках були Райнхольд Бауер (Reinhold Baer) і Маршал Хол (Marshall Hall). Обидва працювали над ідеєю проективних площин, як площин над деякими алгебричними системами. Вони доповнювали один одного користуючись різними підходами. Їх найбільш важливими та інноваційними статтями відповідно були "Homogeneity of Projective Planes" (1942) та "Projective Planes" (1943).

Маршал Хол працював над відповідностями між проективними площинами та такими алгебричними системами як подвійні лупи, тернарні кільця та поля. Райнхолд Бауер, з іншого боку, використовував теоретико-груповий підхід Фелікса Кляйна (Felix Klein), щоб розглянути групи колінеарностей проективних площин. Виявилось, що цей підхід дуже важливий для скінченного випадку. В скінченних випадках групи колінеарностей також приводять до комбінаторних питань — блокових структур і систем трійок Штейнера (Steiner).

Обидві статті могли б стимулювати інтенсивне дослідження в майбутньому. В Сполучених Штатах декілька людей працювало у цій галузі, серед них Р.Г. Брак (R.H. Bruck), Е. Кляйнфелд (E. Kleinfeld), Д.Р. Гагес (D.R. Hughes), (Т.Г.Остром) T.G. Ostrom, та (П.Дембовський) P. Dembowski. Але набагато більше в цьому напрямку працювали в Європі, причому в цій галузі домінували німецькі та італійські геометри, серед останніх Беніаміно Сегре (Beniamino Segre) та Андріано Балотті (Adriano Barlotti). Повернення Бауера до викладацької діяльності в університет Франкфурта в 1956 році, сприяло процвітанню геометрії в Німеччині.

Приблизно в цей час інший підхід, що належав фон Штаудту (Staudt), привів до добре відомої Ленс-Барлотті (Lenz-Barlotti) системи для класифікації проективних площин і їх алгебричних структур, користуючись групами перспектив.

Для того, щоб описати строго транзитивні групи перестановок, Гельмут Карзель (Helmut Karzel) запровадив у 1968 році поняття "майже домена", як узагальнення майже полів Заценхауза (Zassenhaus). Пізніше було доведено, що неасоціативна адитивна система майже домена є лупою Брака.

У той же час з'явилася надзвичайно впливова книга одного з наших класиків Гюнтера Пікета (Guenter Pickert) " Projective Planes", 1955 рік. На додаток до вирішування питання про проективні площини над алгебричними структурами, Пікет запроваджує поняття топологічної площини над тернарними полями, цим самим оживляючи геометрико-топологічний дух 1930-х років.

Іншим джерелом топологічних стимулів був Ганс Фройдентайль (Hans Freudenthal) в Голландії, який у 1950-х та 1960-х роках писав про октави, їх геометрію та топологічні проективні площини. Якщо до цього додати тогочасний внесок ідей російських математиків Скорнякова та Мальцева про топологічні проективні площини та аналітичні лупи, можна зрозуміти, чому топологічні лупи стали таким родючим підґрунтям в майбутньому.

1950-60 рр. — зростання розвитку теорії луп в СРСР

Цікаво, що теорія неасоціативних структур в Радянському Союзі в 1950-ті —1960-ті років, здається, повторила той самий цикл, якого вона зазнала в Німеччині в 1920-ті роки: геометрія — топологія — диференціальна геометрія — і лише пізніше квазігрупи. Як би там не було, цей цикл відбувався на вищому рівні, оскільки базові поняття вже існували до 1950-х років.

Читач може знайти декілька інших статей у цьому томі, на тему диференціальної геометрії, топологічних луп і гладких квазігруп і луп в міру їх появи в цей період. З цієї причини ми зосередимо наш погляд лише на досягненнях, що були зроблені в алгебрі школою Білоусова в Радянському Союзі.

Валентин Данилович Білоусов, хоча молдованин, виконав свою кандидатську дисертацію в Московському університеті під керівництвом А. Г. Куроша. Спочатку Курош невисоко цінував теорію квазігруп, але Білоусов зміг його переконати і пізніше побудувати надзвичайно успішну школу в Кишиневі, у сучасній Молдові. Для Радянського Союзу і для колишніх країн прорадянського блоку, роль Білоусова в успішному розвитку теорії квазігруп і луп і його книги 1967 року "Основы теории квазигрупп и луп" можна справедливо порівнювати з роллю Брака і його "Binary systems", яку вони відіграли в Сполучених Штатах десятьма чи двадцятьма роками раніше. Нажаль на заході, прекрасна книга Білоусова не так широко відома як книга Брака, оскільки вона написана російською мовою і ніколи не перекладалась.

В той час як Брак зосереджував свою увагу на лупах, у книзі Білоусова увага зміщена на квазігрупах взагалі. Як і у попередні періоди, нові аспекти і нові підходи народжувалися в роботі його школи. Серед них були такі:

- нові підходи до квазігруп — похідні операції, спеціальні та F-квазігрупи;
- нові властивості відомих квазігруп — дистрибутивна квазігрупа ізотопна до комутативної лупи Муфанг, ліводистрибутивна, яка ізотопна тотально симетричній квазігрупі;
- n-арні квазігрупи і відповідні алгебричні k-сітки;
- функційні рівняння, які виражають загальні тотожності квазігруп (як бінарні так і n-арні);
- алгебричні сітки і їх використання в питаннях ізотопії і парастрофії квазігруп і луп — наприклад, нова алгебрична інтерпретація конфігурації Бола U_3;

- B_3-лупи, які задовольняють умові U_3 і ізоморфні до лівих і правих луп Бола;

- узагальнені лупи Муфанг і Бола.

Праця Білоусова зробила великий внесок до розповсюдження теорії луп у Центральній Європі, зокрема в таких країнах як Угорщина, Румунія і колишня Чехословаччина. В той же час ранні публікації в цих країнах показують вплив Західного світу, а саме праць Бляшке, Пікета і Брака, як легко бачити, наприклад, в працях Дж. Ацеля (J. Aczel) та Ф. Радо (F. Rado). Сучасна чеська школа Томаша Кепке (Tomaš Kepka) хоча і визнає свої історичні зв'язки з молдовською школою, дотримується багатьох західних традицій і на сьогодні включена в декілька сумісних дослідницьких проектів з американськими дослідниками в теорії луп.

Висновки

З історичної точки зору, Прага є прекрасним вибором для першої міжнародної конференції з теорії луп. Так само як ідеї багатьох шкіл, що згадані вище, знайшли спільне підґрунтя в Чеській республіці, сподіваємось, що ми також можемо слідувати їхньому прикладу, продовжувати співпрацю у дусі співробітництва і сподіватись на нові і ще більш захоплюючі періоди в історії луп в новому тисячолітті.

Література

[1] *Aczel J.*, Quasigroups, nets, and nomograms, Adv. in Math. 1 (1965), MR 33 (1967).
[2] *Albert A.A.*, Quasigroups. I, Trans. Amer. Math. Soc. 54 (1943), MR 5 (1944).
[3] *Albert A.A.*, Quasigroups. II, Trans. Amer. Math. Soc. 55 (1944), MR 6 (1945).
[4] *Artzy R.*, Isotopy and parastrophy of quasigroups, Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963).
[5] *Belousov V.D.*, Foundations of the Theory of Quasigroups and Loops, Nauka, 1967, MR 36 (1968).
[6] *Baer R.*, Homogeneity of projective planes, Amer. J. Math. 64 (1942).
[7] *Blaschke W., Bol G.*, Geometrie der Gewebe, Springer-Verlag, 1938.
[8] *Bol G.*, Gewebe und Gruppen, Math. Ann. 114 (1937).
[9] *Bruck R.H.*, Some results in the theory of quasigroups, Trans. Amer. Math. Soc. 56 (1944), MR 6 (1945).
[10] *Bruck R.H.*, Contributions to the Theory of Loops (1946), Trans. Amer. Math. Soc. 60 (1946), MR 8 (1947).
[11] *Bruck R.H.*, A Survey of Binary Systems, Springer-Verlag, 1958, MR 29 (1959).
[12] *Etherington I.M.H.*, Quasigroups and cubic curves, Edinburgh Math. Soc. 14 (1964), MR 33 (1967).
[13] *Evans T.*, Homomorphisms of non-associative systems, J. London Math. Soc. 24 (1949), MR 11 (1950).
[14] *Freudenthal H.*, Octaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie, Utrecht, 1951, MR 13 (1952).
[15] *Garrison G.N.*, Quasi-groups, Ann. of Math. 41 (2) (1940), MR 7 (1946).
[16] *Hall M.*, Projective planes, Trans. Amer. Math. Soc. 54 (1943), MR 5 (1944).
[17] *Hausmann B.A.*, Ore O., Theory of quasi-groups, Amer. J. Math. 59 (1937).
[18] *Mal'cev A.I.*, Analytic loops, Math. Sb. 36 (1955), MR 16 (1955).
[19] *Manin Yu.I.*, Cubic hypersurfaces I, Math. USSR-Izv. 2 (1968), MR 38 (1969).
[20] *Moufang R.*, Zur Struktur von Alternativkoerpern, Math. Ann. 110 (1935).
[21] *Murdoch D.C.*, Quasi-groups which satisfy certain generalized associative laws, Amer. J. Math. 61 (1939).

[22] *Pickert G.*, Projective Ebenen, Springer-Verlag, 1955, 2nd ed. 1975, MR 51 (1976).
[23] *Pontryagin L.S.*, Topologische Gruppen, Teubner, 1957, MR 20 (1959).
[24] *Robinson D.A.*, Bol loops, Trans. Amer. Math. Soc. 123 (1966), MR 33 (1967).
[25] *Sade A.*, Quasigroupes Parastrophiques, Math. Nachr. 20 (1959), MR 22 (1961).
[26] *Suschkewitsch A.K.*, On a generalization of the associative law, Trans. Amer. Math. Soc. 31 (1929).
[27] *Zorn M.*, Theorie der Alternativen Ringe, Hamb. Abhandl. 8 (1930).

Hala Orlik-Pflugfelder's

HISTORICAL NOTES OF THE LOOP THEORY

SUMMARY

This paper examines the origin of the magnitude theory and its early history, covering the period from the 20s to the 60s of the 20th century.

Key words: *group, loop, quasigroup, isotope, lattice, associativity, history of mathematics, algebra, geometry, topology, combinatorics*

Галина Орлык-Плюкфельдер

ИСТОРИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ С ТЕОРИИ ЛУП

РЕЗЮМЕ

Эта статья рассматривает происхождение теории луп и раннюю ее историю, охватывая период с 20-х по 60-е годы 20-го века.

Ключевые слова: *группа, лупа, квазигруппа, изотоп, решетка, ассоциативность, история математики, алгебра, геометрия, топология, комбинаторика.*