УДК 539.3

Л. А. Фильштинский
Сумской государственный университет, г. Сумы

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Построено точное фундаментальное решение краевой задачи магнитоупругости для пьезомагнитной полуплоскости с учетом двух вариантов краевых условий на ее прямолинейной границе. Аналитическое решение задачи получено с применением метода изображений.

Ключевые слова: анизотропная полуплоскость, магнитоупругость, фундаментальное решение, метод изображений.

В статье получено точное решение магнитоупругости для верхней полуплоскости, в некоторой точке которой действует сосредоточенный источник (сила либо магнитный заряд). Аналогичные задачи теории упругости для анизотропной полуплоскости методом интегральных уравнений, а также методом изображений [1] рассмотрены в [2, 3].

Постановка задачи. В системе координат $0x_1x_2$ рассмотрим полубесконечную пьезомагнитную пластину $x_2 \ge 0,\ -\infty < x_1 < \infty$ в точке (x_{10}, x_{20}) которой приложено механическое усилие $\{P_1, P_2\}$ или магнитный заряд ρ_m. При действии этих источников в пластине возбуждается связанное магнитоупругое поле, модельное представление которого описывается следующими соотношениями [4–6]. Материальные уравнения

$$\begin{gathered}
e_{11} = s_{11}\sigma_{11} + s_{12}\sigma_{22} + g_{21}B_2, \\
e_{22} = s_{12}\sigma_{11} + s_{22}\sigma_{22} + g_{22}B_2, \\
2e_{12} = s_{66}\sigma_{12} + g_{16}B_1, \\
H_1 = -g_{16}\sigma_{12} + \chi_{11}B_1, \\
H_2 = -g_{21}\sigma_{11} - g_{22}\sigma_{22} + \chi_{22}B_2 .
\end{gathered} \tag{1}$$

Уравнения равновесия и магнитостатики

$$\begin{gathered}
\partial_1\sigma_{11} + \partial_2\sigma_{12} = 0,\ \ \partial_1\sigma_{12} + \partial_2\sigma_{22} = 0, \\
\partial_1B_1 + \partial_2B_2 = 0,\ \ \partial_2H_1 - \partial_1H_2 = 0,\ \ \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}.
\end{gathered} \tag{2}$$

Соотношения Коши

$$e_{11} = \partial_1u_1,\ \ e_{22} = \partial_2u_2,\ \ 2e_{12} = \partial_1u_2 + \partial_2u_1. \tag{3}$$

Условие совместности деформации

$$\partial_2^2e_{11} + \partial_1^2e_{22} = 2\partial_1\partial_2e_{12}. \tag{4}$$

К уравнениям (1)–(4) необходимо также приложить соответствующие краевые условия на границе полуплоскости $x_2 = 0$.

В соотношениях (1)–(4): $s_{ij} = s_{ij}^B$ – коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянной индукции магнитного поля, $g_{ki} = g_{ki}^{\sigma,B}$ – пьезомагнитные коэффициенты деформации и напряженности, измеренные при постоянных напряжениях и индукции, $\chi_{kl} = \chi_{kl}^{\sigma}$ – коэффициенты магнитной восприимчивости, измеренные при постоянных напряжениях; e_{ij} и σ_{ij} – компоненты тензоров деформации и напряжения H_i и B_i – векторы магнитной напряженности и индукции соответственно.

Так как рассматривается $2D$ – модуль, то удобно сформулировать ее в терминах комплексного анализа. Для этого введем функцию напряжений $F_1(x_1, x_2)$ и магнитный потенциал $F_2(x_1, x_2)$ по формулам

$$\sigma_{11} = \partial_2^2F_1,\ \ \sigma_{22} = \partial_1^2F_1,\ \ \sigma_{12} = -\partial_1\partial_2F_1,$$

$$B_1 = \partial_2 F_2,\ B_2 = -\partial_1 F_2. \tag{5}$$

При этом, уравнения равновесия и первое уравнение магнитостатики в (2) удовлетворятся тождественно, а подстановка функций (5) в материальные уравнения (1) с использованием полученных результатов в уравнениях совместности (4) и последнем уравнении (2), приводит к двум операторным уравнениям относительно функции F_1 и F_2

$$\begin{gathered} L_{11}(\partial_1,\partial_2)F_1 - L_{12}(\partial_1,\partial_2)F_2 = 0, \\ L_{21}(\partial_1,\partial_2)F_1 + L_{22}(\partial_1,\partial_2)F_2 = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

где

$$L_{11}(\partial_1,\partial_2) = s_{11}\partial_2^4 + (2s_{12}+s_{66})\partial_1^2\partial_2^2 + s_{22}\partial_1^4,\quad L_{22}(\partial_1,\partial_2) = \chi_{22}\partial_1^2 + \chi_{11}\partial_2^2,$$

$$L_{21}(\partial_1,\partial_2) = g_{22}\partial_1^3 + (g_{16}+g_{21})\partial_1\partial_2^2 = L_{12}(\partial_1,\partial_2).$$

Пусть

$$F_1 = -L_{22}U,\ F_2 = L_{21}U, \tag{7}$$

где под $U = U(x_1, x_2)$ понимается достаточное число раз дифференцируемая функция. Тогда, в силу (7), второе уравнение в (6) удовлетворяется тождественно, а первое приводится к дифференциальному уравнению шестого порядка вида

$$D(\partial_1,\partial_2)U = \left(L_{11}L_{22} + L_{12}^2\right)U = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) однородное эллиптического типа. Частное его решение разыскиваем в виде $U = f(x_1 + \mu x_2)$, где μ – числовой параметр. Для его определения получаем из (8) характеристическое алгебраическое уравнение шестой степени

$$L_{11}(1,\mu)L_{22}(1,\mu) + L_{12}^2(1,\mu) = 0.$$

Или, в развернутом виде

$$\sum_{m=0}^{3} a_{2m}\mu^{2m} = 0, \tag{9}$$

$$a_0 = s_{22}\chi_{22} + g_{22}^2,\quad a_2 = s_{22}\chi_{11} + (2s_{12}+s_{66})\chi_{22} + 2(g_{16}+g_{21})g_{22},$$

$$a_4 = s_{11}\chi_{22} + (2s_{12}+s_{66})\chi_{11} + (g_{16}+g_{21})^2,\quad a_6 = s_{11}\chi_{11}.$$

Из эллиптичности уравнения (8) следует, что алгебраическое уравнение (9) не может иметь действительных корней [7]. Ниже будем предполагать, что они все простые.

Пусть

$$\operatorname{Im}\mu_k > 0\ \left(k = \overline{1,3}\right),\quad \mu_4 = \bar\mu_1,\ \mu_5 = \bar\mu_2,\ \mu_6 = \bar\mu_3.$$

Так как функция U по своему физическому содержанию должна быть действительной, то общее решение уравнения (8) можно представить в виде

$$U(x_1,x_2) = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3} f_k(z_k),\ z_k = x_1 + \mu_k x_2, \tag{10}$$

где $f_k(z_k)$ – аналитические в своих аффинных областях функции комплексных переменных z_k. Далее находим представления функции напряжений F_1 и магнитного потенциала F_2. Имеем из (7), (10)

$$F_1(x_1,x_2) = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k f_k''(z_k),\quad F_2(x_1,x_2) = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k f_k'''(z_k), \tag{11}$$

$$\gamma_k = -\chi_{22} - \chi_{11}\mu_k^2,\ \lambda_k = g_{22} + g_{26}\mu_k^2,\ g_{26} = g_{16} + g_{21}.$$

Представления полевых величин находим с учетом соотношений (5) и (11). Имеем

$$\{\sigma_{11},\sigma_{12},\sigma_{22}\} = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\left\{\mu_k^2, -\mu_k, 1\right\}\gamma_k\Phi_k(z_k), \tag{12}$$

$$\{B_1, B_2\} = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\{\mu_k, -1\}\lambda_k\Phi_k(z_k),\quad \Phi_k(z_k) = f_k^{IV}(z_k),$$

$$\{H_1, H_2\} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\{1, \mu_k\}\mu_k r_k \Phi_k(z_k), \quad r_k = g_{16}\gamma_k + \chi_{11}\lambda_k .$$

Механические перемещения выводим, интегрируя совместно представления деформации. Получаем

$$\{u_1, u_2\} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\{p_{1k}, p_{2k}\}\varphi_k(z_k), \quad \varphi_k'(z_k) = \Phi_k(z_k), \tag{13}$$

где

$$p_{1k} = \left(s_{11}\mu_k^2 + s_{12}\right)\gamma_k - g_{21}\lambda_k, \quad p_{2k} = \left(s_{12}\mu_k + \frac{s_{22}}{\mu_k}\right)\gamma_k - \frac{g_{22}}{\mu_k}\lambda_k .$$

Подсчитаем теперь интегральные характеристики полей. Главный вектор усилий, действующих на дугу AB в теле, находим с учетом представлений (12). Имеем

$$X_{1n} = \sigma_{11}\cos\psi + \sigma_{12}\sin\psi = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\mu_k a_k(\psi)\Phi_k(z_k),$$

$$X_{2n} = \sigma_{12}\cos\psi + \sigma_{22}\sin\psi = -2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k a_k(\psi)\Phi_k(z_k), \quad a_k(\psi) = \mu_k\cos\psi - \sin\psi . \tag{14}$$

Отсюда

$$X_1 = \int_{AB} X_{1n}ds = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\mu_k\varphi_k(z_k)\Big|_A^B, \quad X_2 = \int_{AB} X_{2n}ds = -2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\varphi_k(z_k)\Big|_A^B . \tag{15}$$

В равенствах (14), (15) величины X_{1n}, X_{2n} – компоненты вектора напряжения, действующего на AB в точке с нормалью $\vec{n}$, составляющей с осью $0x_1$ угол ψ; X_1 и X_2 – компоненты главного вектора усилий, действующих на дуге AB.

Главный момент сил действующих на дуге AB определяется формулой

$$M = \int_{AB}(x_1 X_{2n} - x_2 X_{1n})ds .$$

Используя соотношения (14), выводим

$$M = -2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\int_{AB} z_k\Phi_k(z_k)dz_k = -2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\left(z_k\varphi_k(z_k)\Big|_A^B - \int_{AB}\varphi_k(z_k)dz_k\right). \tag{16}$$

Поток вектора магнитной индукции через AB и работу вектора магнитной напряженности вычисляем с использованием равенств (12). Имеем

$$B_n = B_1\cos\psi + B_2\sin\psi = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k a_k(\psi)\Phi_k(z_k),$$

$$H_s = H_2\cos\psi - H_1\sin\psi = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k r_k a_k(\psi)\Phi_k(z_k). \tag{17}$$

Отсюда получаем

$$\Pi = \int_{AB} B_n ds = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\varphi_k(z_k)\Big|_A^B, \quad \Gamma = \int_{AB} H_s ds = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k r_k\varphi_k(z_k)\Big|_A^B . \tag{18}$$

Фундаментальные решения для пьезомагнитной полуплоскости. Будем считать, что на границе полуплоскости имеет место один из двух вариантов краевых условий:

– граница $x_2 = 0$ свободна от сил и нормальная компонента вектора магнитной индукции на ней равна нулю;
– граница $x_2 = 0$ жестко закреплена и касательная компонента вектора магнитной напряженности на ней равна нулю.

В соответствии с этим, с учетом соотношений (12), (13), краевые условия на прямолинейной границе полуплоскости представим в виде

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3} c_{mk}\Phi_k(x_1) = 0 \ \left(m=\overline{1,3}\right), \tag{19}$$

где для первого варианта

$$c_{1k} = 1,\ c_{2k} = -\mu_k,\ c_{3k} = -\lambda_k,$$

для второго варианта краевых условий

$$c_{1k} = p_{1k},\ c_{2k} = p_{2k},\ c_{3k} = \mu_k r_k.$$

Потенциалы $\Phi_k(z_k)$ построим, используя схему метода изображений [1].

Пусть (x_{10}, x_{20}) – точка приложения источника. Тогда можем записать

$$\Phi_k(z_k) = \frac{A_k}{z_k - z_{0k}} - \sum_{n=1}^{3}\frac{\overline{\alpha}_{kn}\overline{A}_n}{z_k - \overline{z}_{0n}},\quad \varphi_k(z_k) = A_k\ln(z_k - z_{0k}) - \sum_{n=1}^{3}\overline{\alpha}_{kn}\overline{A}_n\ln(z_k - \overline{z}_{0n}), \tag{20}$$

где

$$z_{0k} = \operatorname{Re} z_0 + \mu_k \operatorname{Im} z_0,\ z_0 = x_{10} + i x_{20},\ x_{20} > 0,\ \overline{z}_{on} = \operatorname{Re} z_0 + \overline{\mu}_n \operatorname{Im} z_0,$$

черта сверху обозначает сопряжение комплексной величины, константы α_{kn} определим ниже из краевых условий (19).

По построению, первый член в (20) должен определять фундаментальное решение в пьезомагнитной плоскости. В соответствии с этим три комплексные постоянные A_k определяются из шести условий: трех условий однозначности перемещений и магнитного потенциала, двух статических условий равновесия элемента, содержащего точку z_0 и условия сохранения магнитного заряда ρ_m.

Учитывая приращения функции $\varphi_k(z_k)$ при полном обходе контура, содержащего точку z_0 и соотношения (11), (13), (15) и (18), сводим указанные выше условия к системе линейных алгебраических уравнений типа Вандермонда, которая при условиях наложенных выше на характеристические числа μ_k, однозначно разрешима [8]

$$\operatorname{Im}\sum_{k=1}^{3}\mu_k^{n-1}A_k = B_n \ \left(n=\overline{0,5}\right),$$

$$B_0 = -P_1\frac{s_{12}\Delta_1 + g_{21}\Delta_3}{4\pi\Delta_1\Delta_2},\ B_1 = \frac{\chi_{11}\rho_m - g_{26}P_2}{4\pi\Delta_1},$$

$$B_2 = P_1\frac{g_{21}}{4\pi\Delta_1},\ B_3 = \frac{g_{22}P_2 - \chi_{22}\rho_m}{4\pi\Delta_1},\ B_4 = P_1\frac{g_{16}\chi_{22} - g_{22}\chi_{11}}{4\pi\chi_{11}\Delta_1},$$

$$B_5 = P_2\frac{s_{12}\Delta_1 - s_{11}g_{22}\chi_{22}}{4\pi\chi_{11}s_{12}\Delta_1} + \rho_m\frac{g_{21}\Delta_1 + s_{11}\chi_{22}}{4\pi\chi_{11}s\Delta},$$

$$\Delta_1 = g_{26}\chi_{22} - g_{22}\chi_{11},\ \Delta_2 = a_0 = s_{22}\chi_{22} + g_{22}^2,\ \Delta_3 = s_{22}\chi_{11} + g_{26}g_{22}.$$

Девять констант α_{km} фигурирующих в представлениях (20), определяются из краевых условий. Подстановка функций $\Phi_k(x_1)$ в (19) приводит после элементарных преобразований к системе

$$\sum_{k=1}^{3}c_{mk}\overline{\alpha}_{kn} = \overline{c}_{mn} \ \left(m,n=\overline{1,3}\right).$$

Для известных пьезомагнитных керамик [4–6] $\det\|c_{mk}\| \neq 0$, поэтому матрица неизвестных $\overline{\alpha} = \|\overline{\alpha}_{kn}\|$ определяется формулой

$$\overline{\alpha} = c^{-1}\overline{c},\quad \overline{c} = \|\overline{c}_{mk}\|.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морс Ф. М. Методы теоретической физики: В 2 т. / Ф. М. Морс, Г. Фешбах. – М.: Изд-во иностр. лит., 1958. – Т. 1. – 930 с.
2. Фильштинский Л. А. Краевые задачи теории упругости для анизотропной полуплоскости, ослабленной отверстием или разрезом / Л. А. Фильштинский // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – № 6. – С. 72–79.

3. Фильштинский Л. А. Моделирование физических полей в кусочно-однородных деформируемых телах / Л. А. Фильштинский. – Сумы: Изд-во СумГУ, 2001. – 450 с.
4. Clark A. E. Ferromagnetic Materials: In 2. Vol. 1 / A. E. Clark. – Amsterdam: North-Holland, 1980. – 531 p.
5. James R. D. Theory of magnetostriction with application to terfenol / R. D. James, D. Kinderlehrer // J. Appl. Phys. – 1994. – Vol. 76, Iss. 10. – P. 7012–7014.
6. Калоеров С. А. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей / С. А. Калоеров, А. И. Баева, О. И. Бороненко. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 268 с.
7. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. – М.: Гостехиздат, 1957. – 355 с.
8. Смирнов В. И. Курс высшей математики / В. И. Смирнов. – Л.-М.: Гостехиздат, 1949. – Т. 3, Ч. 1. – 336 с.

Поступила в редакцию 27.05.2014 г.

РЕЗЮМЕ

Побудовано точний фундаментальний розв’язок крайової задачі магнітопружносты для п'єзомагнітної напівплощині з урахуванням двох варіантів крайових умов на її прямолінійній границі. Аналітичний розв’язок задачі отримано із використанням методу зображень.

Ключеві слова: анізотропна напівплощина, магнітопружність, фундаментальний розв’язок, метод зображень.

SUMMARY

An exact fundamental solution of the boundary value problem for the magneto piezomagnetic half-plane given two choices of boundary conditions on its straight boundary. Analytical solution is obtained using the method of images.

Keywords: anisotropic half-plane, magnetoelasticity, fundamental solution, method of images.