УДК 510.2:519.7

С. В. Сторожев

АЛГОРИТМ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ НОРМАЛЬНОГО ЧАСТОТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕЧЕТКИМ ИНТЕРВАЛОМ

Рассматривается численно-аналитический алгоритм решения задачи определения реперных точек нормированного симметричного нечеткого интервала, аппроксимирующего нормальное частотное распределение с произвольными параметрами математического ожидания и дисперсии. Используемыми условиями для двухпараметрической аппроксимации являются равенство площадей над осью абсцисс, ограничиваемых функцией плотности нормального распределения и функцией принадлежности для интервала, а также минимизация интеграла квадратичных отклонений значений указанных функций на всей числовой прямой. Задача сведена к решению трансцендентного уравнения относительно модального параметра интервала. Представлены примеры численной реализации алгоритма.

Ключевые слова: нормальные частотные распределения, приближение функции плотности нечетким интервалом, алгоритм двухпараметрической аппроксимации, трансцендентные уравнения относительно модальных параметров.

Введение и постановка задачи. Частотный способ относится к числу наиболее востребованных при построении функций принадлежности $\mu_A(x)$ для нечетких множеств, описывающих частные критерии в моделях технологических и социально-экономических процессов [1–4]. При его применении значения $\mu_A(x)$ характеризуются соотношениями, в которых аргументами являются общее количество привлеченных экспертов и количество экспертов, давших положительное заключение о принадлежности элемента некоторого универсального множества к рассматриваемому нечеткому множеству. Алгоритмы формализации нечетких экзогенных данных, представленных в форме статистических частотных распределений, заключаются в преобразовании их в нечеткие множества различного типа, в том числе трапецеидальные нечеткие множества – нечеткие интервалы [5–7]. Совершенствование подобных алгоритмов сохраняет актуальность в качестве одного из направлений развития теории моделирования многокритериальных процессов в условиях неопределенности [7].

В данном контексте, цель представляемого в данной работе исследования заключается в построении численно-аналитического алгоритма решения задачи определения реперных точек симметричного нечеткого интервала, аппроксимирующего нормальное частотное распределение с произвольными параметрами математического ожидания и дисперсии.

Полагается, что нормальное частотное распределение для переменной x с произвольными параметрами математического ожидания m, дисперсии σ и функцией плотности

$$f(x) = \exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}) \tag{1}$$

подлежит трансформации в характеризуемое реперными точками (a, b, c, d) симметричное нечеткое множество трапецеидальной формы с функцией принадлежности

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, a); \\ (x-a)/(b-a), & x \in (a, b); \\ 1, & x \in (b, c); \\ (d-x)/(d-c), & x \in (c, d); \\ 0, & x \in (d, -\infty), \end{cases} \tag{2}$$

где $m = (a+d)/2 = (b+c)/2$, $b-a = d-c$. С учетом свойства симметрии функции плотности $f(x)$ и функции принадлежности $\mu_A(x)$ относительно точки $x = m$ задача аппроксимации может быть решена для области $x \in [m, \infty)$.

В качестве наилучшего приближения нормального распределения с плотностью (1) нормальным нечетким интервалом с функций принадлежности (2) будем рассматривать интервал, удовлетворяющий двум условиям для определения параметров c и d. Первым является условие равенство площадей над осью абсцисс, ограничиваемых функцией плотности нормального распределения и функцией принадлежности для интервала в области $x \in [m, \infty)$:

$$\int_m^\infty f(x)dx = \int_m^\infty \mu_A(x)\,dx\,. \tag{3}$$

Второе условие заключается в минимизации интеграла квадратичных отклонений значений указанных функций в области $x \in [m, \infty)$:

$$\int_m^c (1-f(x))^2\,dx + \int_c^d (f(x)-(d-x)/(d-c))^2\,dx + \int_d^\infty f^2(x)\,dx \to \min\,. \tag{4}$$

Определению из задачи (3), (4) подлежат значения реперных точек c и d искомого нечеткого интервала.

Построение и примеры реализации алгоритма. При анализе двухпараметрической задачи приближения (3), (4) используются представления для интеграла Эйлера–Пуассона

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\,dt = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi} \tag{5}$$

и специальной функции

$$\mathrm{erf}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt\,, \tag{6}$$

которая имеет альтернативные представления в виде рядов

$$\mathrm{erf}\,(x) \approx \frac{2x}{\sqrt{\pi}}\left[1-\frac{x^2}{1!\,3}+\frac{x^4}{2!\,5}-\frac{x^6}{3!\,7}+...+(-1)^n\,\frac{x^{2n}}{n!\,(2n+1)}+...\right], \tag{7}$$

$$\mathrm{erf}\,(x) \approx 1-\frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\left[1-\frac{1}{2x^2}+\frac{1\cdot 3}{2^2x^4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3x^6}+...\right], \tag{8}$$

$$\mathrm{erf}\,(x) \approx 1-\frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\left[1-\frac{2!}{1!(2x)^2}+\frac{4!}{2!(2x)^4}-\frac{6!}{3!(2x)^6}+...\right]. \tag{9}$$

Для производной функции $\mathrm{erf}\,(x)$ приближенное представление разложением в ряд имеет вид

$$\mathrm{erf}'(x) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+...+(-1)^n\,\frac{x^{2n}}{n!}+...\right]. \tag{10}$$

При использовании представлений (2), (5) соотношение (3) принимает вид

$$\sigma\sqrt{\pi/2} = (c+d)/2-m\,, \tag{11}$$

откуда следует соотношение связи $d = 2(m+\sigma\sqrt{\pi/2})-c$. Соответственно минимизируемое соотношение (4) принимает вид

$$\begin{aligned} J(c) = c-m+(\sigma\pi)/2-2J_1(m,c)+2(d-c)^{-1}J_2(c,d)+ \\ +2d(c-d)^{-1}J_1(c,d)+J_3(c,d,(d-c)^{-1},d(c-d)^{-1}). \end{aligned} \tag{12}$$

В выражении (12) использованы обозначения

$$J_1(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\left[\mathrm{erf}(\frac{\beta-m}{\sqrt{2}\sigma})-\mathrm{erf}(\frac{\alpha-m}{\sqrt{2}\sigma})\right],$$

$$J_2(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta x\,f(x)dx = \frac{m\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\left[\mathrm{erf}(\frac{\beta-m}{\sqrt{2}\sigma})-\mathrm{erf}(\frac{\alpha-m}{\sqrt{2}\sigma})\right]+\sigma^2\left[\exp(-\frac{\alpha-m^2}{2\sigma^2})-\exp(-\frac{\beta-m^2}{2\sigma^2})\right],$$

$$J_3(\alpha,\beta,p,q) = \int_\alpha^\beta (px+q)^2\,dx = p^2(\beta^3-\alpha^3)/3+2pq(\beta^2-\alpha^2)+q^2(\beta-\alpha)\,.$$

Формулируемое с учетом представлений (12) условие поиска экстремумов $dJ(c)/dc = 0$ представляет собой искомое трансцендентное уравнение относительно значения c. Левая часть этого уравнения получена в замкнутой весьма громоздкой аналитической форме. С учетом типа искомых корней анализируемого уравнения и наличия соотношений (7)–(10) для расчета входящих в него специальных функций поиск значений $c(\sigma)$ может быть эффективно реализован методом бисекции. В частности, полученные этим методом на основе описанного алгоритма значения $c(\sigma)$, $d(\sigma)$ для случая $m = 1,0$ составляют:

$$c(1) = 1,224\,,\ \ d(1) = 3,283\,;\ \ c(2) = 1,471\,,\ \ d(2) = 5,542\,;$$

$$c(3) = 1,705\,,\ \ d(3) = 7,815\,;\ \ c(4) = 1,946\,,\ \ d(4) = 10,081\,.$$

Выводы. Результатом представленных в работе исследований является построение численно-аналитического алгоритма решения задачи определения реперных точек нормированного симметричного нечеткого интервала, аппроксимирующего нормальное частотное распределение с произвольными параметрами математического ожидания и дисперсии. Критериями двухпараметрической аппроксимации являются равенство площадей над осью абсцисс, ограничиваемых функцией плотности нормального распределения и функцией принадлежности для интервала, а также условие минимизации интеграла квадратичных отклонений значений указанных функций на всей числовой прямой. Задача сведена к решению полученного в аналитической форме трансцендентного уравнения относительно модального параметра интервала. Представлены отдельные результаты расчетов, проведенных с использованием построенного алгоритма. Описываемый алгоритм может найти широкое применение при исследованиях моделей технологических, финансово-инвестиционных и социально-экономических процессов на этапах формализации нечеткими интервалами представленных статистическими частотными распределениями экзогенных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Герасимов Б. М. Системы поддержки принятия решений: проектирование, применение, оценка эффективности / Б. М. Герасимов, М. М. Дивизинюк, И. Ю. Субач. – Севастополь: СНИЯЭиП, 2004. – 318 с.
2. Дымова Л. Г. Применение методов теории нечетких множеств для оценки эффективности инвестиций / Л. Г. Дымова, Д. Севастьянов // Финансы, учет, аудит. – 1997. – № 3. – С. 34–38.
3. Дымова Л. Г. Многокритериальная оценка уровня социально-экономического развития регионов / Л. Г. Дымова, П. В. Севастьянов, Л. И. Шейграцева // Белорусский экономический журнал. – 1999. – № 2. – С. 112–118.
4. Матвійчук А. В. Аналіз та прогнозування розвитку фінансово-економічних систем із використанням теорії нечіткої логіки / А. В. Матвійчук. – К.: Центр навчальної літератури, 2005. – 205 с.
5. Рыжов А. П. Модели поиска решений в нечеткой среде / А. П. Рыжов. – М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2004. – 96 с.
6. Борисов В. В. Нечеткие модели и сети / В. В. Борисов, В. В. Круглов, А. С. Федулов. – М.: Горячая линия–Телеком, 2007. – 284 с.
7. Дилигенский Н. В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Н. В. Дилигенский, Л. Г. Дымова, П. В. Севастьянов. – М.: Издательство Машиностроение-1, 2004. – 397 с.

Поступила в редакцию 28.05.2014 г.

РЕЗЮМЕ

Побудовано аналітико-числовий алгоритм визначення реперних точок нормованого симетричного нечіткого інтервалу, який апроксимує функцію щільності нормального частотного розподілу з довільними параметрами математичного очікування і дисперсії. Використовуваними умовами для двопараметричної апроксимації є рівність площ над віссю абсцис, що обмежуються функцією щільності нормального розподілу і функцією приналежності для нечіткого інтервалу, а також мінімізація інтегралу квадратичних відхилень значень зазначених функцій на усій числовій прямій. Задача зведена до розв'язання трансцендентного рівняння відносно модального параметра інтервалу. Представлено дані числової реалізації алгоритму. Алгоритм може знайти широке застосування при дослідженнях моделей технологічних, фінансово-інвестиційних та соціально-економічних процесів на етапах формалізації нечіткими інтервалами екзогенних даних, представлених статистичними частотними розподілами

Ключові слова: нормальні частотні розподіли, наближення функції щільності нечітким інтервалом, алгоритм двопараметричної апроксимації, трансцендентні рівняння відносно модальних параметрів.

SUMMARY

Is constructed numeric-analytical algorithm for determining modal points of normalized symmetric fuzzy interval which make approximation for the function of density a normal random distribution. The problem is reduced to the solution of the transcendental equation for modal parameter of interval. Are presented of the numerical results of application of the algorithm. The algorithm can be widely used in studies of models of technological, financial, investment and socio-economic processes in the stages of formalization of fuzzy intervals exogenous data presented in form of statistical distributions.

Keywords: normal random distribution, density function approximation in form of fuzzy interval, algorithm of two-parametric approximation, transcendental equation for modal parameters.