

УДК 539.213; 530.1

**В. С. Абрамов***Донецький фізико-технічний інститут ім. А. А. Галкіна НАН України, г. Донецьк***ПЕРЕСТРОЙКА СТОХАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ПОЛЯ ДЕФОРМАЦИИ  
В МОДЕЛЬНОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ НАНОСИСТЕМЕ**

Теоретически и методом численного моделирования показано, что стохастическое состояние поля деформации реализуется внутри многослойной наносистемы. Для нижнего и верхнего слоев модельной наносистемы характерно наличие осцилляций с переменными амплитудами у функции смещения узлов решетки. Показано, что усредненные функции смещений для основных (с положительным фрактальным индексом) и инверсных (с отрицательным фрактальным индексом) состояний являются комплексными. Характер их поведения изменяется с регулярного на стохастический при изменении управляющих параметров. При этом наличие особенностей типа максимумов и минимумов на указанных зависимостях позволяет оценить: характерные корреляционные длины; глубину, высоту барьеров и их положение. Показана возможность перестройки структуры ям и барьеров, появления гистерезисных явлений при изменении управляющих параметров.

*Ключевые слова:* стохастическое состояние поля деформации, усредненные функции, основные и инверсные структурные состояния, вариации параметров, модельная многослойная наносистема.

**Введение.** В современных квантовых информационных технологиях, в квантовой электронике, оптике, спинтронике, атомтронике [1] широко используются многослойные наносистемы. Для создания различных технических схем, устройств в атомтронике применяют атомы (вместо электронов в электронике). При этом используют совокупность ультрохолодных атомов, сверхжидкости, где элементарными возбуждениями могут быть вихри, антивихри, пары вихрь-антивихрь [1]. При исследовании динамики и различных гистерезисных явлений в таких системах диссипация энергии выполняет важную роль. В качестве активных объектов также могут выступать агрегаты [2], фрактальные осцилляторы [3], ловушки [4], дислокации [5]. Так в работе [6] были использованы ловушки для высокоточного измерения атомной массы электрона в синглетном ионе  $^{12}\text{C}^{5+}$ . Это позволило уточнить численные значения массы электрона, а также отношения массы протона к массе электрона, что является важным для проверки других физических фундаментальных постоянных. Отдельные электроны, атомы, диполи, квадруполь, спины, помещенные во фрактальную ловушку, проявляют квантовые и статистические свойства [7]. Изучение влияния различных стохастических полей на физические свойства отдельных объектов в ловушке представляет собой одну из фундаментальных проблем таких квантовых систем. В ряде работ теоретически исследована динамика электрического дипольного момента [8], молекул с индуцированным дипольным моментом [9] в стохастическом электрическом поле; эффект спиновой декогеренции, обусловленный флуктуирующими полями [10].

Ранее для квазидвумерной фрактальной структуры (модельная наносистема с фрактальной дислокацией) были исследованы: поведение стохастического поля деформации при наличии бифуркаций [11]; инверсные (с отрицательным фрактальным индексом) структурные состояния [12]; поведение типа мягкой моды [13]. Установлены особенности поведения различных ветвей усредненных функций смещения. Показано, что основные структурные состояния (с положительным фрактальным индексом) описываются комплексными функциями, а для инверсных состояний существует интервал изменения фрактального индекса, где эффективное затухание отсутствует (функции являются действительными).

При исследовании объемных фрактальных структур в многослойной наносистеме в работе [14] функции смещения узлов решетки были действительными. Однако вариация управляющих параметров может привести к появлению комплексных функций.

Целью данной работы является исследование стохастического состояния поля деформации в модельной многослойной наносистеме с учетом вариации управляющих параметров.

**Описание стохастического состояния поля деформации.** Рассматривается модельная наносистема в виде объемной дискретной решетки  $N_1 \times N_2 \times N_3$ , узлы которой задаются целыми числами  $n, m, j$  ( $n = \overline{1, N_1}$ ;  $m = \overline{1, N_2}$ ;  $j = \overline{1, N_3}$ ). Безразмерное переменное смещение  $u$  узла решетки запишем в виде

$$u = (1 - \alpha)(1 - 2\text{sn}^2(u - u_0, k)) / Q, \quad Q = p'_0 + p'_3 j - b_3(j - j_0)^2 / j_c^2, \quad (1)$$

где  $\alpha$  – фрактальная размерность поля деформации  $u$  вдоль оси  $Oz$  ( $\alpha \in [0,1]$ );  $u_0$  – постоянное смещение;  $k$  – модуль функции эллиптического синуса;  $p'_0, p'_3, b_3, j_0, j_c$  – некоторые параметры.

Внутри объемной наносистемы у функции смещения  $u$  появляется явная зависимость от координаты  $z$  и от фрактального индекса  $\alpha$  [11]. Это связано с учетом эффектов сдвига и бифуркации решения нелинейного уравнения для функции смещения. Поэтому такой выбор функции  $Q$  в виде модельного соотношения из (1) связан с необходимостью учета этой зависимости от  $z(j)$  вдоль оси  $Oj$ .

При постоянных параметрах  $p'_3 = 0, b_3 = 0, k = 0.5, Q = p'_0$  нелинейное уравнение из (1) относительно функции смещения  $u$  использовалось ранее в [14] для описания стохастического состояния поля деформации в модельной наносистеме. Для многослойной наносистемы при  $p'_3 \neq 0, b_3 \neq 0$  параметр  $Q$  зависит от номера слоя  $j$ . Поэтому смещение  $u$ , получаемое как решение нелинейного уравнения (1) также начинает зависеть от  $j$ . В общем случае от  $j, \alpha$  также начинают зависеть смещение  $u_0$  и модуль  $k$ . Учет этих изменений моделируем выражениями

$$u_0 = F(\varphi_0; k_u); \quad \varphi_0 = \pi n_{\varphi 0} (1 - 2f_s) / 4; \quad f_s = s / d; \quad f'_s = (d - s) / d; \\ k_u^2 = (1 - \alpha) / Q; \quad k_u^2 + (k'_u)^2 = 1; \quad f'_s + f_s = 1. \quad (2)$$

Здесь  $F$  – неполный эллиптический интеграл первого рода;  $k_u$  – модуль эллиптических функций синуса;  $s, d$  – параметры, связанные с характерными размерами объектов в модельной наносистеме;  $n_{\varphi 0} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  – целые числа, которые определяют набор различных состояний поля деформации. Положительным значениям  $n_{\varphi 0}$  соответствуют состояния с левой поляризацией (вращение по часовой стрелке), отрицательным – состояния с правой поляризацией (вращение против часовой стрелки). При этом перестройку состояний поля деформации дополнительно можно выполнять за счет параметра  $f'_s$ , что приводит к изменению угла  $\varphi_0$  и смещения  $u_0$  из (2).

В данной работе в качестве характерного размера  $d = d_k = 111.89 A$  (где  $A$  – ангстрем) выберем средний размер агрегата [2] в отдельном слое. При этом характерная длина  $s = s_k$  связана с корреляционной длиной  $\xi_k$  соотношением  $s_k = 2\xi_k$ .

С учетом выражений (2) вместо уравнения (1) запишем восемь модельных уравнений относительно смещений  $u_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) в виде

$$u = u_1 = k_u^2 (1 - 2\text{sn}^2(u_1 - u_0, k_u)); \quad u = u_2 = k_u^2 (1 - 2\text{sn}^2(u_2 - u_0, k'_u)); \quad (3)$$

$$u = u_3 = (k'_u)^2 (1 - 2\text{sn}^2(u_3 - u_0, k'_u)); \quad u = u_4 = (k'_u)^2 (1 - 2\text{sn}^2(u_4 - u_0, k_u)); \quad (4)$$

$$u = u_5 = k_u^2 (1 - 2\text{sn}^2(u_5 - u_0, -k_u)); \quad u = u_6 = k_u^2 (1 - 2\text{sn}^2(u_6 - u_0, -k'_u)); \quad (5)$$

$$u = u_7 = (k'_u)^2 (1 - 2\text{sn}^2(u_7 - u_0, -k'_u)); \quad u = u_8 = (k'_u)^2 (1 - 2\text{sn}^2(u_8 - u_0, -k_u)). \quad (6)$$

Появление восьми уравнений для смещения  $u$  связано с учетом различных ветвей для модулей  $\pm k_u, \pm k'_u$  из неявно заданного уравнения  $k_u^2 + (k'_u)^2 = 1$ .

В дальнейшем ограничимся рассмотрением только двух модельных уравнений относительно смещений  $u_1, u_2$  из (3). Положение особых точек (аттракторов) определим из условия  $Q = 0$ . Тогда уравнение (в неявном виде) для критических плоскостей  $j = j_k$  имеет вид

$$p'_0 + p'_3 j_k - b_3 (j_k - j_0)^2 / j_c^2 = 0. \quad (7)$$

Из (7) следует существование двух критических плоскостей, положение которых определяется выбором параметров  $p'_0, p'_3, b_3, j_0, j_c$ .

Далее исследуем поведение поля деформации для варианта с параметром  $b_3 = 0$ . Тогда из (7) следует уравнение только для одной критической плоскости  $j_k$

$$p'_0 + p'_3 j_k = 0. \quad (8)$$

При этом переменные параметры  $k_u, k'_u$  записываются в виде

$$k_u^2 = \alpha' / Q = \alpha' / (p'_0 + p'_3 j); \quad (k'_u)^2 = (p_\alpha + p'_3 j) / (p'_0 + p'_3 j); \quad p_\alpha = p'_0 - \alpha'; \quad \alpha' + \alpha = 1. \quad (9)$$

Для положительных значений  $\alpha \in [0, 1]$  из (9) следует, что  $\alpha' \in [0, 1]$ . При этом для фрактальных индексов  $\alpha, \alpha'$  допустима интерпретация в терминах функций распределения типа Ферми-Дирака.

Для инверсных структурных состояний [12, 13] с отрицательным фрактальным индексом  $\alpha \in [-1, 0]$  допустима интерпретация индексов  $(-\alpha), \alpha'$  в терминах функций распределения типа Бозе-Эйнштейна, поскольку выполняется условие нормировки типа  $\alpha' - (-\alpha) = 1$ , при этом  $\alpha' = 1 + (-\alpha)$ ,  $\alpha' \in [1, 2]$ . Отсюда следует, что изменение фрактального индекса  $\alpha$  с положительного значения на отрицательное может приводить к изменению статистики для структурных состояний с Ферми-Дирака на Бозе-Эйнштейна.

Дальнейший анализ выполним для случая с  $p'_3 = 0$ . Это даст возможность найти характерные интервалы изменения параметра  $p'_0$ , переменных параметров  $k_u, k'_u$ , в которых поведения функций смещения  $u_1, u_2$  существенно различаются. Из выражений (9) находим

$$k_u^2 = \alpha' / p'_0; \quad (k'_u)^2 = p_\alpha / p'_0. \quad (10)$$

Рассмотрим четыре варианта выбора параметров, которые выполняются для фрактальных индексов, изменяющихся в интервалах  $\alpha \in [-1, 1]$ ,  $\alpha' \in [0, 2]$ .

*Вариант 1:*  $p'_0 \geq \alpha'$ . Тогда при выполнении условия  $0 \leq p_\alpha \leq p'_0$  переменные параметры изменяются в интервалах  $0 \leq k_u^2 \leq 1$ ,  $0 \leq (k'_u)^2 \leq 1$ . Выполняется условие нормировки типа Ферми-Дирака  $k_u^2 + (k'_u)^2 = 1$ . При этом функции смещения  $u_1, u_2$  из выражений (3) будут действительными. Особенности типа максимумов у функции  $u_1$  будут при выполнении условия  $\text{sn}^2(u_1 - u_0, k_u) = 0$ , а у функции  $u_2$  – при  $\text{sn}^2(u_2 - u_0, k'_u) = 0$ , при этом  $u_1 = u_2 = k_u^2$ . Особенности типа минимумов у функции  $u_1$  будут при выполнении условия  $\text{sn}^2(u_1 - u_0, k_u) = 1$ , а у функции  $u_2$  – при  $\text{sn}^2(u_2 - u_0, k'_u) = 1$ , при этом  $u_1 = u_2 = -k_u^2$ .

*Вариант 2:*  $0 < p'_0 \leq \alpha'$ . Тогда при выполнении условия  $-\alpha' < p_\alpha \leq 0$  переменные параметры изменяются в интервалах  $1 \leq k_u^2 < +\infty$ ,  $-\infty < (k'_u)^2 \leq 0$ . Выполняется условие нормировки типа Бозе-Эйнштейна  $k_u^2 - (k'_u)^2 = 1$ . При этом функции смещения  $u_1, u_2$  из выражений (3) становятся комплексными.

*Вариант 3:*  $-\alpha' \leq p'_0 < 0$ . Тогда при выполнении условия  $-2\alpha' < p_\alpha \leq -\alpha'$  переменные параметры изменяются в интервалах  $-\infty < k_u^2 \leq -1$ ,  $2 \leq (k'_u)^2 < +\infty$ . Условие нормировки типа Бозе-Эйнштейна  $(k'_u)^2 - (k_u^2) = 1$  является видоизмененным по сравнению с вариантом 2. Функции смещения  $u_1, u_2$  из выражений (3) остаются комплексными.

*Вариант 4:*  $-\infty < p'_0 \leq -\alpha'$ . Тогда при выполнении условия  $-\infty < p_\alpha \leq -2\alpha'$  переменные параметры изменяются в интервалах  $-1 \leq k_u^2 < 0$ ,  $1 < (k'_u)^2 \leq 2$ . Сохраняется условие нормировки типа Бозе-Эйнштейна  $(k'_u)^2 - (k_u^2) = 1$  как и для варианта 3. Функции смещения  $u_1, u_2$  из выражений (3) остаются комплексными.

При  $p'_3 \neq 0$  функции смещения  $u_1, u_2, u_0$ , модули  $k_u, k'_u$  существенно зависят от  $j$ . Поэтому решения нелинейных уравнений (3) будем проводить методом итераций отдельно для основных ( $\alpha \in [0, 1]$ ) и инверсных ( $\alpha \in [-1, 0]$ ) структурных состояний.

Анализ поведения поля деформации удобно проводить в терминах усредненных функций  $M$  [6]

$$M(j) = \text{Sp}(\hat{\rho}\hat{u}) = M' + iM''; \quad \hat{\rho} = \hat{\xi}_{N2}^T \hat{\xi}_{N1} / N_2 N_1, \quad (11)$$

где  $\text{Sp}$  – операция вычисления следа квадратной матрицы;  $M' = \text{Re } M$ ,  $M'' = \text{Im } M$ ;  $i$  – мнимая единица; значок « $T$ » означает операцию транспонирования;  $\hat{\xi}_{N1}, \hat{\xi}_{N2}$  – вектор-строки с элементами равными единице.

**Основные структурные состояния.** Анализ основных состояний поля деформации модельной многослойной наносистемы проведем для положительных фрактальных индексов  $\alpha = \alpha' = 0.5$ . При численном моделировании решение нелинейных уравнений (3) выполнено методом итераций по переменной  $m$  с начальными условиями  $u_1 = u_2 = 0$ . Полагалось, что  $N_1 = 30$ ;  $N_2 = 40$ ;  $N_3 = 67$ ;  $n_{\varphi 0} = 3$ ;  $\varphi_0 = 3\pi(1 - 2f_s) / 4$ .

Рассматривается вариант с  $b_3 = 0$  и  $p'_3 \neq 0$ , поэтому переменные параметры  $k_u, k'_u$  удовлетворяют уравнениям (9). Пример поведения зависимостей реальных и мнимых частей функции смещения  $u_1$  из (3) от решеточных индексов  $n, m$  для конкретных слоев  $j$  дан на рис. 1.

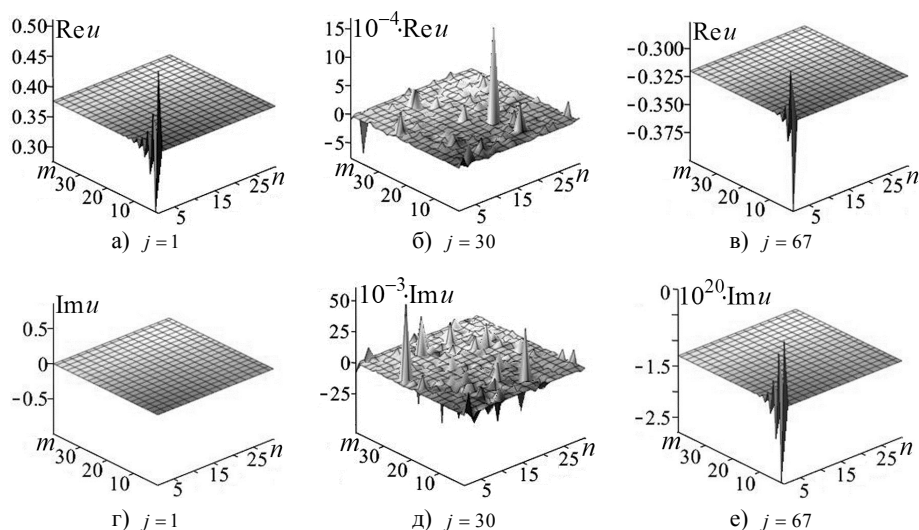


Рис. 1. Зависимости реальных (а–в) и мнимых (г–е) частей функции смещения  $u_1$  от решеточных индексов  $n, m$  для различных  $j$  при  $\alpha = 0.5$ ,  $p'_0 = 1.0123$ ,  $p'_3 = -0.03375$ ,  $f_s = 0.5$ .

Для нижнего слоя  $j=1$   $\text{Re}u_1$  (рис. 1, а) описывает колебания с переменной амплитудой (вдоль оси  $Om$ ), локализованные вблизи граничных значений  $n = 1, 2$ ;  $\text{Im}u_1 = 0$  (рис. 1, г) для всех узлов слоя. При увеличении номера слоя  $j$  амплитуды  $\text{Re}u_1$  и  $\text{Im}u_1$  увеличиваются, и поведение поля деформации становится хаотическим во всей плоскости слоя (рис. 1, б, д). Для верхнего слоя  $j = 67$  (рис. 1, в, е) наблюдаются колебания с малой переменной амплитудой как у  $\text{Re}u_1$ , так и у  $\text{Im}u_1$ , но по другим законам по сравнению с рис. 1, а, г.

Дальнейший анализ результатов проводим в терминах усредненных функций  $M$  из (11). На рис. 2 даны зависимости реальных  $M'_1, M'_2$  (рис. 2, а, в) и мнимых  $M''_1, M''_2$  (рис. 2, б, г) частей функций  $M$  от номера слоя  $j$ , соответственно, для смещений  $u_1, u_2$  для параметров  $p'_0 = 1.0123 \geq \alpha'$ ,  $p'_3 = -0.03375$ . Основные пики наблюдаются в слое с  $j = 30$ , что подтверждает теоретический вывод о существовании критического слоя с  $j = j_k = -p'_0 / p'_3 = 30$  из выражения (8). Поведения усредненных функций  $M_1$  и  $M_2$  имеют существенные различия. Основные пики при  $j_k = 30$  на зависимостях  $M'_1, M''_1$  направлены вниз. На зависимостях  $M'_2, M''_2$  основные пики при  $j_k = 30$  направлены в противоположные стороны, а дополнительные пики при  $j = 28$  направлены вверх (рис. 2, в).

Приведем результаты поведения усредненных функций  $M$  от управляющего параметра  $f_s$  для критического слоя  $j_k = 30$ . Указанные зависимости функций  $M$  для смещений  $u_1, u_2$  даны на рис. 3. Усредненные функции  $M_1, M_2$  являются комплексными, их поведение носит ярко выраженный стохастический характер во всей области изменения параметра  $f_s \in [0; 1]$ . Эти данные согласуются со стохастическим поведением смещения  $u_1$  из рис. 1, б, д.

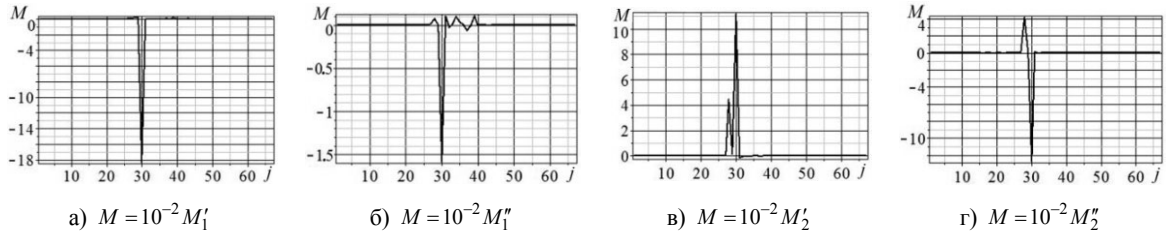


Рис. 2. Поведення функцій  $M$  від  $j \in [1; 67]$  при  $\alpha = 0.5$ ,  $f_s = 0.5$ ,  $p'_0 = 1.0123$ ,  $p'_3 = -0.03375$  для  $u_1$  (а, б);  $u_2$  (в, г)

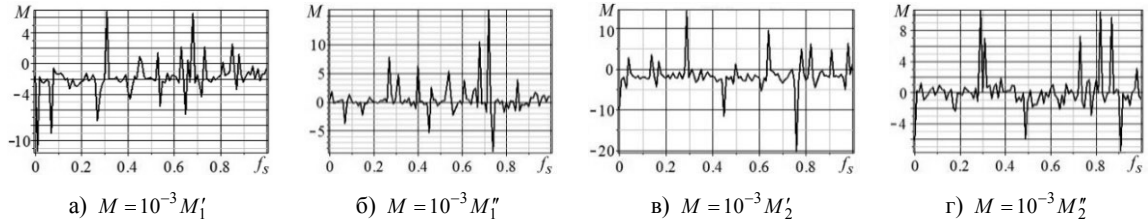


Рис. 3. Поведення функцій  $M$  від  $f_s \in [0; 1]$  при  $\alpha = 0.5$ ,  $j = 30$ ,  $p'_0 = 1.0123$ ,  $p'_3 = -0.03375$  для  $u_1$  (а, б);  $u_2$  (в, г)

Тепер розглянемо випадок з параметрами  $b_3 = 0$ ,  $p'_3 = 0$ . Змінні параметри  $k_u, k'_u$  задовольняють рівнянням (10) і не залежать від номера шару  $j$ , однак суттєво залежать від вибору області зміни параметра  $p'_0$  (варіанти 1–4). На рис. 4–6 дані приклади поведінки усереднених функцій  $M$  від  $f_s$  для різних варіантів вибору  $p'_0$ .

Поведення функцій  $M_1, M_2$  (рис. 4, а, з) узгоджується з теоретичними висновками для варіанта 1, коли  $p'_0 \geq \alpha'$ . При цьому функції  $M_1, M_2$  є дійсними, спостерігаються два мінімуми при  $f_{s1} = 0.24$ ,  $f_{s3} = 0.91$  і максимум при  $f_{s2} = 0.4$ . Ці функції є періодичними з періодом  $T_{f_s} = f_{s3} - f_{s1} = 0.67$ . Отримані результати дають можливість оцінити кореляційні довжини  $\xi_i = s_i / 2 = f_{si} d_k$ , ( $i = 1, 2, 3$ ):  $\xi_1 = 13.43A$ ;  $\xi_2 = 22.38A$ ;  $\xi_3 = 50.09A$ .

Звернемо увагу, що зміна параметра  $p'_3$  зі значення  $p'_3 \neq 0$  на  $p'_3 = 0$  призводить до суттєвих змін стохастичного поведінки комплексних функцій  $M_1, M_2$  (рис. 3) на регулярне поведінку дійсних функцій (рис. 4, а, з).

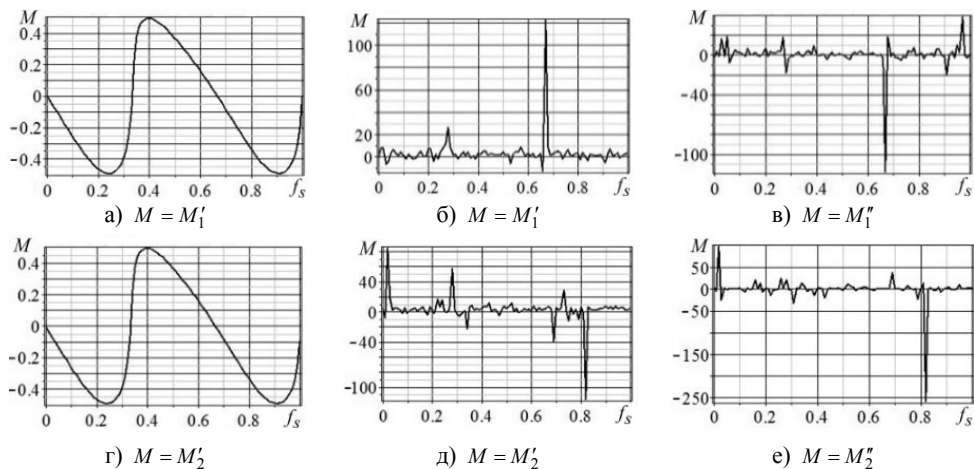


Рис. 4. Поведення функцій  $M$  від  $f_s \in [0; 1]$  при  $\alpha = 0.5$ ,  $p'_3 = 0$ , для  $p'_0 = 1.0123$ ,  $u_1$  (а);  $u_2$  (г);  $p'_0 = 0.10123$ ,  $u_1$  (б, в);  $u_2$  (д, е)

Поведение усредненных функций  $M_1, M_2$  (рис. 4, б, в, д, е) соответствует варианту 2, когда  $0 < p'_0 \leq \alpha'$ . Указанные функции становятся комплексными по сравнению с вариантом для рис. 4, а, з. Наблюдаются основные пики для  $M_1$  и  $M_2$  (как у реальных, так и у мнимых частей), соответственно, при  $f_s = 0.67$  и  $f_s = 0.82$ . При других значениях  $f_s$  наблюдаются дополнительные пики с малой амплитудой и ярко выраженное стохастическое поведение.

Поведение усредненных функций  $M_1, M_2$  (рис. 5) соответствует варианту 3, когда  $-\alpha' \leq p'_0 < 0$ . Указанные функции являются комплексными, основные пики наблюдаются при других значениях  $f_s$ , стохастическое поведение изменяется по сравнению с поведением для рис. 4, б, в, д, е.

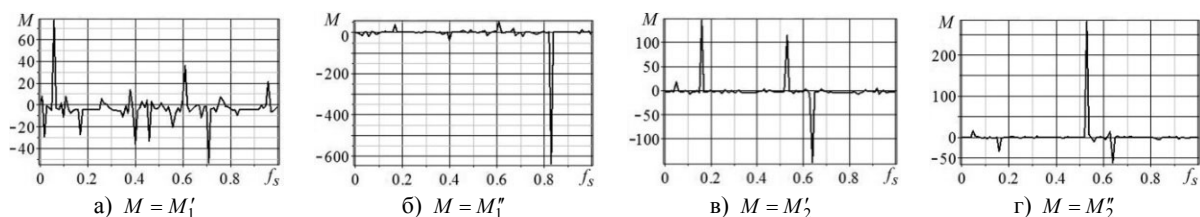


Рис. 5. Поведение функций  $M$  от  $f_s \in [0; 1]$  при  $\alpha = 0.5, p'_0 = -0.10123, p'_3 = 0$  для  $u_1$  (а, б);  $u_2$  (в, г)

Дальнейшее изменение параметра  $p'_0$  (рис. 6) соответствует варианту 4, когда  $-\infty < p'_0 \leq -\alpha'$ . При этом усредненные функции  $M_1, M_2$  также являются комплексными. На зависимостях реальных частей  $M'_1, M'_2$  наблюдается максимумы для  $M'_1$  при  $f_{s1} = 0.04, f_{s3} = 0.71$ ; для  $M'_2$  при  $f_{s1} = 0.06, f_{s3} = 0.85$  и минимум при  $f_{s2} = 0.61$ . Для мнимых частей  $M''_1, M''_2$  характерно ярко выраженное стохастическое поведение с малыми амплитудами (рис. 6, б, з). Поведение функций  $M'_1, M'_2$  является регулярным (рис. 6, а, в) и периодическим по  $f_s$  с различными периодами  $T_{f_s} = f_{s3} - f_{s1} = 0.67, T_{f_s} = f_{s3} - f_{s1} = 0.79$ , соответственно.

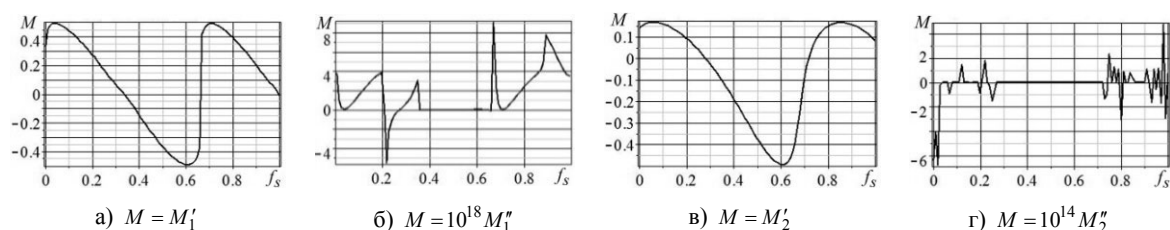


Рис. 6. Поведение функций  $M$  от  $f_s \in [0; 1]$  (а, в, г),  $f_s \in [0.01; 0.99]$  (б) при  $\alpha = 0.5, p'_0 = -1.0123, p'_3 = 0$  для  $u_1$  (а, б);  $u_2$  (в, г)

**Инверсные структурные состояния.** Анализ поведения поля деформации модельной многослойной наносистемы для инверсных состояний (с отрицательным фрактальным индексом) проведем на основе зависимостей усредненных функций  $M$  из (11) от параметра  $f_s$  для смещений  $u_1, u_2$  из (3). При этом  $\alpha = -0.5, \alpha' = 1.5$ . Все ниже приведенные результаты (рис. 7–9) даны для параметров  $b_3 = 0, p'_3 = 0$ , параметр  $p'_0 \neq 0$  и принимает различные значения (варианты 1–4).

Зависимости на рис. 7, а, з соответствуют варианту 1, когда  $p'_0 \geq \alpha'$ . В этом случае функции  $M_1, M_2$  являются действительными ( $M_1 = M'_1, M''_1 = 0, M_2 = M'_2, M''_2 = 0$ ), также как и для варианта с  $\alpha = 0.5$  (рис. 4, а, з). Однако периодичность у этих функций нарушена, по сравнению с периодическими функциями из рис. 4, а, з.

Так для  $M_1$  (рис. 7, а) наблюдаются два минимума при  $f_{s1} = 0.19$  и  $f_{s5} = 0.86$ . Между ними формируется сигнал сложной формы с ярко выраженным максимумом при  $f_{s2} = 0.34$ , слабо выраженным максимумом вблизи  $f_{s4} = 0.67$  и точкой перегиба между ними вблизи  $f_{s3} = 0.63$ .

Поведение функции  $M_2$  (рис. 7, *з*) является более сложным по сравнению с  $M_1$  (рис. 7, *а*). Наблюдаются: основные минимумы при  $f_{s1} = 0.16$ ,  $f_{s3} = 0.34$ ,  $f_{s7} = 0.79$ ,  $f_{s9} = 0.88$  и дополнительный минимум при  $f_{s5} = 0.63$ ; основные максимумы при  $f_{s2} = 0.17$ ,  $f_{s4} = 0.35$ ,  $f_{s8} = 0.8$ ,  $f_{s10} = 0.89$  и дополнительный максимум при  $f_{s6} = 0.67$ .

Отметим, что особенность типа точки перегиба при  $f_{s3} = 0.63$  на зависимости  $M_1$  (рис. 7, *а*) при переходе к зависимости  $M_2$  (рис. 7, *з*) заменяется на особенность типа локального минимума при  $f_{s5} = 0.63$ . Такое поведение характерно для гистерезисных явлений в системах, которые описываются двумя потенциальными ямами и барьером между ними [1]. В нашем случае на зависимости  $M_2$  наблюдается число ям больше чем два. Глубина ям и высота барьеров определяются критическими значениями усредненных функций  $M$  в этих точках, их положение связано с критическими значениями параметра  $f_s$  или критическими значениями углов  $\varphi_0$ . Так для рис. 7, *з* имеем: при  $f_{s5} = 0.63$ ,  $\varphi_{05} = -35.1^\circ$ ,  $M_2 = M'_{25} = -0.0804$ ; при  $f_{s6} = 0.67$ ,  $\varphi_{06} = -45.9^\circ$ ,  $M_2 = M'_{26} = 0.0809$ .

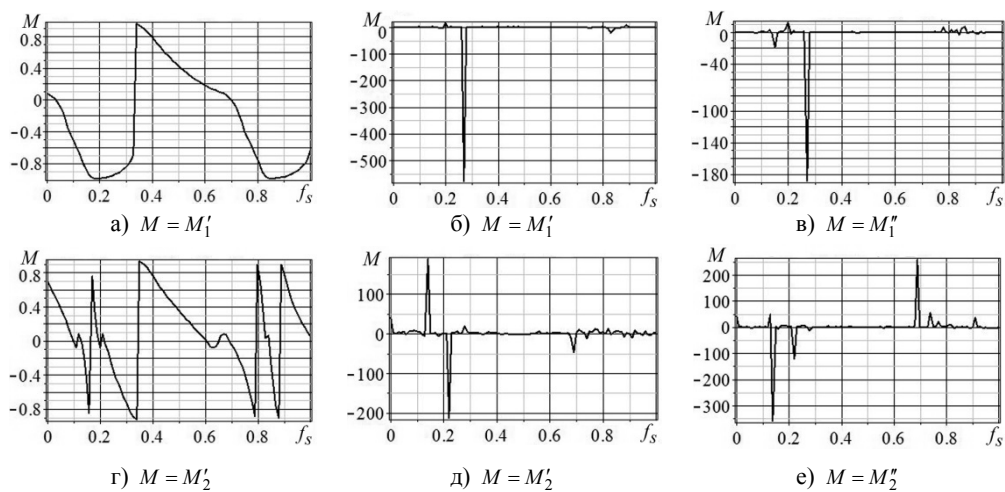


Рис. 7. Поведение функций  $M$  от  $f_s \in [0;1]$  при  $\alpha = -0.5$ ,  $p'_3 = 0$ , для  $p'_0 = 1.5123$ ,  $u_1$  (а);  $u_2$  (г);  $p'_0 = 1.0123$ ,  $u_1$  (б, в);  $u_2$  (д, е)

Переход к варианту 2, когда  $0 < p'_0 \leq \alpha'$  за счет уменьшения значения параметра  $p'_0$  приводит к тому, что усредненные функции  $M_1$ ,  $M_2$  (рис. 7, б, в, д, е) становятся комплексными. При этом области регулярного поведения этих функций (по сравнению с рис. 7, а, з) сужаются и появляются области с ярко выраженным стохастическим поведением. Основные особенности для  $M'_1$  (рис. 7, б) наблюдаются при  $f_{s1} = 0.2$  (пик вверх),  $f_{s2} = 0.27$  (пик вниз),  $f_{s3} = 0.83$  (пик вниз); для  $M'_2$  (рис. 7, д) наблюдаются при  $f_{s1} = 0.14$  (пик вверх),  $f_{s2} = 0.22$  (пик вниз),  $f_{s3} = 0.69$  (пик вниз). Детальный анализ области  $f_s \in (0.49; 0.71)$  показывает, что поведение функции  $M'_1$  является практически регулярным с малыми амплитудами, а вне интервала – хаотическим с большими амплитудами. Поведение функции  $M'_2$  практически регулярное внутри области  $f_s \in (0.43; 0.52)$  и хаотическое вне этой области.

При дальнейшем изменении параметра  $p'_0$  и переходе к варианту 3, когда  $-\alpha' \leq p'_0 < 0$  усредненные функции  $M_1$ ,  $M_2$  (рис. 8) остаются комплексными, однако характер их поведения существенно изменяется по сравнению с функциями из рис. 7. Так, на зависимости  $M'_1$  (рис. 8, а) наблюдаются следующие особенности поведения: при критических значениях  $f_{s1} = 0.54$  (пик вниз),  $f_{s2} = 0.56$  (пик вверх),  $f_{s3} = 0.64$  (пик вверх); внутри интервала  $f_s \in (0.25; 0.76)$  наблюдается ярко выраженное стохастическое, а в интервалах  $f_s \in (0.1; 0.25)$ ,  $f_s \in (0.76; 0.92)$  практически регулярное поведение.

На зависимости  $M'_2$  (рис. 8, в) наблюдаются следующие особенности поведения: основные минимумы при  $f_{s1} = 0.24$ ,  $f_{s5} = 0.84$  и максимумы при  $f_{s2} = 0.29$ ,  $f_{s6} = 0.9$ ; дополнительные минимумы при  $f_{s3} = 0.56$  и максимумы при  $f_{s4} = 0.59$ . Так, глубина ямы и высота барьера (для дополнительных минимумов и максимумов), их положение определяются следующими критическими значениями параметров: при  $f_{s3} = 0.56$ ,  $\varphi_{03} = -16.2^\circ$ ,  $M'_2 = M'_{23} = -0.8887$ ; при  $f_{s4} = 0.59$ ,  $\varphi_{04} = -24.3^\circ$ ,  $M'_2 = M'_{24} = -0.8751$  (рис. 8, в). Отметим, что зависимости  $M'_2$  (рис. 8, в) смещены в область отрицательных значений функции по сравнению с  $M'_2$  (рис. 7, з, д).

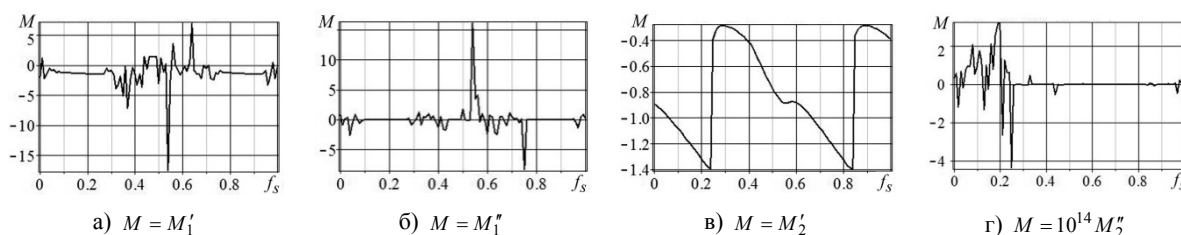


Рис. 8. Поведение функций  $M$  от  $f_s \in [0; 1]$  при  $\alpha = -0.5$ ,  $p'_0 = -1.0123$ ,  $p'_3 = 0$  для  $u_1$  (а, б);  $u_2$  (в, г)

Дальнейший переход к варианту 4, когда  $-\infty < p'_0 \leq -\alpha'$  приводит к изменению характера поведения комплексных функции  $M_1$ ,  $M_2$  (рис. 9) по сравнению с рис. 8. На зависимости функции  $M'_1$  (рис. 9, а) наблюдается основной пик вниз при следующих критических значениях параметров  $f_s = 0.3$ ,  $\varphi_0 = 54^\circ$ ,  $M'_1 = -15.0581$ . Поведение  $M'_1$  внутри интервала  $f_s \in (0.55; 0.66)$  является практически регулярным, а вне интервала – стохастическим. Функция  $M'_2$  является регулярной (рис. 9, в).

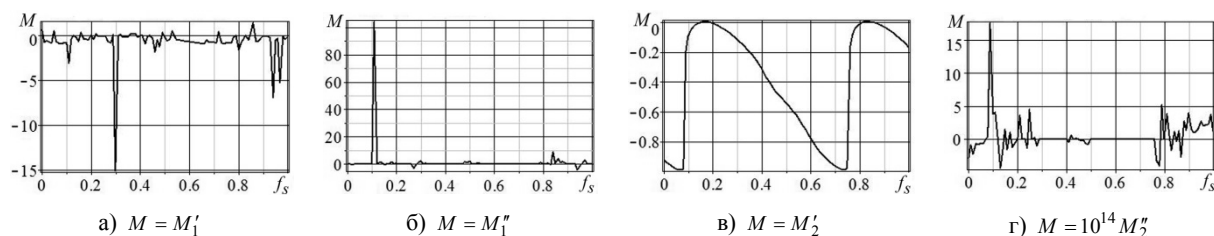


Рис. 9. Поведение функций  $M$  от  $f_s \in [0; 1]$  при  $\alpha = -0.5$ ,  $p'_0 = -1.5123$ ,  $p'_3 = 0$  для  $u_1$  (а, б);  $u_2$  (в, г).

На зависимости  $M'_2$  наблюдаются минимумы при  $f_{s1} = 0.07$ ,  $f_{s4} = 0.74$ ; максимумы при  $f_{s2} = 0.16$ ,  $f_{s5} = 0.83$ ; несколько точек перегиба, одна из них при  $f_{s3} = 0.63$ . Отметим, что положение этой точки перегиба совпадает с положением локального минимума для  $M'_2$  из рис. 7, з. При этом величина  $f_{s4} - f_{s1} = f_{s5} - f_{s2} = 0.67$  совпадает с периодом  $T_{f_s} = 0.67$ , определенному по данным рис. 4, а, з, рис. 6, а при  $\alpha = 0.5$ .

**Выводы.** Показано, что для основных состояний (с фрактальным индексом  $\alpha \in [0; 1]$ ) при  $p'_3 = -0.03375$  ярко выраженное стохастическое состояние поля деформации реализуется в многослойной наносистеме для критического слоя с  $j = j_k = 30$  (рис. 1–3). Для нижнего и верхнего слоев модельной наносистемы характерно наличие осцилляций с переменными амплитудами у функции смещения узлов решетки.

Анализ поведения усредненных функций  $M$  от  $f_s$  при  $p'_3 = 0$  для основных и инверсных (с фрактальным индексом  $\alpha \in [-1; 0]$ ) состояний подтверждает теоретический вывод о существовании интервалов изменения управляющего параметра  $p'_0$ , внутри которых эти функции становятся комплексными, характер



их поведіння змінюється з регулярного на стохастический. Наявність особливостей типу максимумів і мінімумів на залежностях  $M$  від  $f_s$  дозволяє оцінити: характерні кореляційні довжини; глибину ям, висоту бар'єрів і їх положення. При варіації управляючих параметрів  $p'_0$ ,  $p'_3$ ,  $f_s$  структура ям і бар'єрів змінюється, можливо поява гістерезисних явищ.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Hysteresis in a quantized superfluid 'atomtronic' circuit / S. Eckel, J. G. Lee, F. Jendrzejewski et al. // Nature. – 2014. – Vol. 506, No 7487. – P. 200–203.
2. Абрамов В. С. Световое эхо на системе металлических агрегатов / В.С. Абрамов, У.Х. Копвиллем // Известия АН СССР. Сер. физ. – 1973. – Т. 37, № 10. – С. 2198–2202.
3. Abramov V. S. Model of Nonlinear Fractal Oscillator in Nanosystem / In book Applied Non-Linear Dynamical Systems (Editor: Jan Awrejcewicz). – Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. – 2014. – Vol. 93. – P. 337–350.
4. Abramova O. P. Fractal nanotraps based on quasi-two-dimensional fractal structures / O. P. Abramova, S. V Abramov // Dynamical Systems Theory (Editors J.Awrejcewicz et al.) DSTA 2013 (Poland, Lodz, December 2-5, 2013). – 2013. – P. 71–80.
5. Abramov V. S. Correlation Relations and Statistical Properties of the Deformation Field of Fractal Dislocation in a Model Nanosystem / V. S. Abramov // Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal. – 2013. – No 3. – P. 357–365.
6. Sturm S. High-precision measurement of the atomic mass of the electron / S. Sturm, F. Köhler, J. Zatorski et al. // Nature. – 2014. – Vol. 506, No 7489. – P. 467–470.
7. Coupling a single electron to a Bose-Einstein condensate / J. Balewski, A. Krupp, A. Gaj et al. // Nature. – 2013. – Vol. 502, No 7473. – P. 664–667.
8. Band Y. B. Dynamics of an electric dipole moment in a stochastic electric field / Y. B. Band // Phys. Rev. E. – 2013. – Vol. 88, 022127. – P. 1–7.
9. Band Y. B. Molecules with an induced dipole in a stochastic electric field / Y. B. Band, Y. Ben-Shimol // Phys. Rev. E. – 2013. – Vol. 88, 042149. – P. 1–6.
10. Szańkowski P. Spin decoherence due to fluctuating fields / P. Szańkowski, M. Trippenbach, Y. B. Band // Phys. Rev. E. – 2013. – Vol. 87, 052112. – P. 1–9.
11. Абрамов В. С. Поведення поля деформації фрактальної дислокації при наявності бифуркацій / В. С. Абрамов // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2011. – № 2. – С. 23–29.
12. Abramov V. S. Inverse structural states of the stochastic deformation field of fractal dislocation / V. S. Abramov // Фізика і техніка високих тиску. – Т. 23, No 3. – 2013. – С. 54–62.
13. Абрамов В. С. Поведення типу м'якої моди для інверсних структурних станів фрактальної дислокації в модельній наносистемі / В. С. Абрамов // Актуальні проблеми механіки деформованого твердого тіла: Тр. VII Міжнарод. науч. конф. (п. Мелекино, 11-14 червня 2013 г.). – Т. 1. – Донецьк: ДонНУ, 2013. – С. 13–17.
14. Абрамова О. П. Фрактальні об'ємні структури в багаторівній наносистемі / О.П. Абрамова, С.В. Абрамов // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2014. – № 1. – С. 7–13.

Поступила в редакцію 28.05.2014 г.

#### РЕЗЮМЕ

Теоретично і методом чисельного моделювання показано, що стохастичний стан поля деформації реалізується всередині багатопшарової наносистеми. Для нижнього і верхнього шарів модельної наносистеми характерна наявність осциляцій з перемінними амплітудами у функції зміщення вузлів решітки. Показано, що усереднені функції зміщення для основних (з позитивним фрактальним індексом) і інверсних (з негативним фрактальним індексом) станів є комплексними. Характер їх поведінки змінюється з регулярного на стохастичний при зміні керуючих параметрів. При цьому наявність особливостей типу максимумів і мінімумів на зазначених залежностях дозволяє оцінити: характерні кореляційні довжини; глибину ям, висоту бар'єрів і їх положення. Показана можливість перебудови структури ям і бар'єрів, появи гістерезисних явищ при зміні керуючих параметрів.

*Ключові слова:* стохастичний стан поля деформації, усереднені функції, основні і інверсні структурні стани, варіації параметрів, модельна багатопшарова наносистема.

#### SUMMARY

Theoretically and method of numerical simulation is shown that the stochastic state of the deformation field is realized inside the multilayer nanosystems. For the lower and upper layers of the model nanosystem is characterized by oscillations with variable amplitude of the displacement function of the lattice nodes. It is shown that the averaged displacement functions for the basic (with positive fractal index) and inverse (with negative fractal index) states are complex. The character of their behavior changes from regular to stochastic when changing the governing parameters. Thus presence of features such as maxima and minima on the specified dependences allows to evaluate: characteristic correlation lengths; the depth of the wells, the height of barriers and their position. The possibility of alteration of the wells and barriers structure, the appearance of hysteresis when changing the control parameters is shown.

*Keywords:* stochastic state of the deformation field, averaged functions, main and inverse structural states, variation of parameters, model multilayer nanosystem.