УДК 531.36, 531.38

Кононов Ю. Н., Святенко Я. И.

[1] **доктор физико-математических наук, профессор,**
Институт прикладной математики и механики Национальной академии наук Украины

[2] **аспирант кафедры прикладной механики и компьютерных технологий,**
Донецкий национальный университет имени Васыля Стуса

О ВЛИЯНИИ ДИССИПАТИВНОГО И ДВУХ ПОСТОЯННЫХ МОМЕНТОВ НА УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ СВЯЗАННЫХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА

На основании иннорного подхода получены в виде системы трех неравенств условия асимптотической устойчивости равномерного вращения в сопротивляющейся среде двух тяжелых гироскопов Лагранжа, связанных сферическим шарниром. Нижний гироскоп имеет неподвижную точку. Вращение каждого гироскопа поддерживается постоянным моментом в инерциальной системе координат и в системе координат, связанной с твердым телом. В случае отсутствия одного из гироскопов вновь полученное условие устойчивости совпадают с известным. Рассмотрен случай вырождения сферического шарнира в универсальный шарнир (шарнир Гука). Показано, что невыполнение квадратного неравенства относительно угловой скорости собственного вращения ведет к неустойчивости.

Ключевые слова: *динамически симметричные твёрдые тела, сферический шарнир, сопротивляющаяся среда, равномерное вращение, асимптотическая устойчивость.*

Введение

Задачи о движении систем связанных твердых тел (ССТТ) имеют большое научное и прикладное значение, т.к. многие объекты современной робототехники, морской, железнодорожной и мн. др. техники могут быть представлены в виде ССТТ. Исполнение объектов космической, авиационной и морской техники в виде ССТТ наметилось в 60-е годы прошлого века. Движение ССТТ описываются конечным числом нелинейных ОДУ. В этой связи ССТТ приобретают все большее прикладное значение как модель управляемой механической системы и все большее теоретическое значение, т.к. в такой системе возникают колебания достаточно сложного вида. Наиболее общие уравнения движения системы связанных твердых тел были получены П.В. Харламовым [1] и исследованы в работах его учеников [2–4] и многих других.

Влияние диссипации на устойчивость вращения твердого тела рассматривалась во многих статьях. Достаточно хороший обзор этих статей и методов исследований можно найти, например, в работах [5–9].

В статье [8] рассмотрена задача о движении тяжелого динамически симметричного твёрдого тела вокруг неподвижной точки, находящегося под действием диссипативного и постоянного момента в инерциальной системе координат, а в работе [9] учтен еще и постоянный момент в системе отсчета, связанной с твердым телом. Показано, что эти моменты могут оказывать существенно дестабилизирующее влияние на устойчивость равномерного вращения твёрдого тела. В настоящей статье обобщены результаты работы [9] на случай равномерного вращения двух гироскопов Лагранжа, связанных сферическим шарниром.

1. Постановка задачи и метод решения

Рассмотрим вращение в сопротивляющейся среде двух динамически симметричных тяжелых твердых тел $S_i (i = 1, 2)$. Твердые тела S_1 и S_2 связаны в точке O_2 сферическим шарниром [5–7]. Нижнее тело S_1 имеет неподвижную точку O_1 (рис. 1). Тяжелое твердое тело S_i находится под действием диссипативного момента $\overrightarrow{M}_{id} = -D_i \overrightarrow{\omega}_i \, (D_i = diag(D_{i1}, D_{i1}, D_{i3}))$, моделирующего сопротивляющуюся среду, постоянного момента в инерциальной системе координат $\overrightarrow{M}_{ip} = -P_i \overrightarrow{\nu}$ и постоянного момента в системе отсчета, связанной с твердым телом $\overrightarrow{M}_{iq} = Q_i \overrightarrow{c}_i$. Здесь $\overline{s}_1 = \overline{O_1 O_2}$, $\overline{c}_i = \overline{O_i C_i}$, C_i и $\overrightarrow{\omega}_i$ соответственно центр масс и угловая скорость тела S_i, $\overline{\nu} = \overline{g}/g$, $\overline{g}$ – вектор ускорения свободного падения, $D_{i1}, D_{i1}, D_{i3}, Q_i$ и P_i – постоянные $(D_{i1} > 0, D_{i3} > 0)$, $i = 1, 2$.

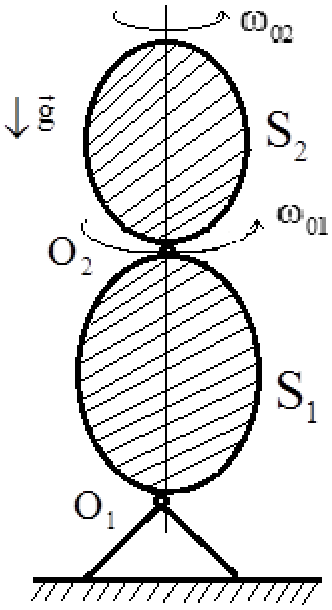

Рис.1 Вращение в сопротивляющейся среде двух гироскопов Лагранжа с неподвижной точкой

Уравнения движения двух упруго связанных тяжелых волчков Лагранжа, с учетом диссипативного и постоянного моментов, будут иметь вид аналогичный [6–8]

$$
\begin{gathered}
(J_1 \cdot \overline{\omega}_1)^\bullet + m_2 \overline{s}_1 \times (\overline{\omega}_1 \times \overline{s}_1 + \overline{\omega}_2 \times \overline{c}_2)^\bullet = \\
= (m_1 \overline{c}_1 + m_2 \overline{s}_1) g \times \overline{\nu} - P_1 \overline{\nu} - D_1 \overline{\omega}_1 + \overrightarrow{M}_{1q}, \\
\\
(J_2 \cdot \overline{\omega}_2)^\bullet + m_2 \overline{c}_2 \times (\overline{\omega}_1 \times \overline{s}_1 + \overline{\omega}_2 \times \overline{c}_2)^\bullet = \\
= m_2 \overline{c}_2 g \times \overline{\nu} - P_2 \overline{\nu} - D_2 \overline{\omega}_2 + \overrightarrow{M}_{2q},
\end{gathered}
\qquad (1.1)
$$

где J_i – тензор инерции тела S_i относительно точки O_i, а m_i – масса этого тела $(i = 1, 2)$, точкой обозначена абсолютная производная.

Для проектирования уравнений (1.1) на связанные с твердым телом системы координат свяжем с каждым из тел S_i неизменно базис $\overline{e}_1^i \overline{e}_2^i \overline{e}_3^i$ с вершиной в точке O_i, оси которого направим по главным осям тензора инерции J_i и введем неподвижный базис $\overline{e}_1^0 \overline{e}_2^0 \overline{e}_3^0$ с центром в неподвижной точке O_1, вектор $\overline{e}_3^0$ которого имеет направление, противоположное направлению силы тяжести.

Пусть $\overline{s}_i = s_i\overline{e}_3^i$, $\overline{c}_i = c_i\overline{e}_3^i$,. Величины $\alpha_{\mu k}^{ij} = \overline{e}_\mu^i \cdot \overline{e}_k^j$ $(i, j = \overline{0, n}; \mu, k = 1, 2, 3)$ определяют ориентацию базиса $\overline{e}_1^i\overline{e}_2^i\overline{e}_3^i$ в $\overline{e}_1^j\overline{e}_2^j\overline{e}_3^j$

$$\overline{e}_\mu^i = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{\mu k}^{ij}\overline{e}_k^j. \tag{1.2}$$

Коэффициенты $\alpha_{\mu k}^{ij}$ можно выразить через $\alpha_{\mu\sigma}^{i0}$ и $\alpha_{\mu\sigma}^{j0}$ [6]

$$\alpha_{\mu k}^{ij} = \sum_{\sigma=1}^{3} \alpha_{\mu\sigma}^{i0}\alpha_{\mu\sigma}^{j0}. \tag{1.3}$$

Векторные уравнения (1.1) в проекциях на оси подвижного базиса $\overline{e}_1^i\overline{e}_2^i\overline{e}_3^i$ примут вид

$$\begin{gathered}
A_1^{'}\dot{p}_1 + (C_1 - A_1^{'})q_1r_1 + s_1a_2\left[(\dot{p}_2 - q_2r_2)\alpha_{22}^{11} - (\dot{q}_2 + p_2r_2)\alpha_{21}^{11} + (p_2^2 + q_2^2)\alpha_{23}^{11}\right] = \\
= a_1g\alpha_{32}^{01} - D_{11}p_1 - \alpha_{31}^{01}P_1, \\
A_1^{'}\dot{q}_1 - (C_1 - A_1^{'})p_1r_1 - s_1a_2\left[(\dot{p}_2 - q_2r_2)\alpha_{12}^{11} - (\dot{q}_2 + p_2r_2)\alpha_{11}^{11} + (p_2^2 + q_2^2)\alpha_{13}^{11}\right] = \\
= -a_1g\alpha_{13}^{01} - D_{11}q_1 - \alpha_{32}^{01}P_1, \\
C_1\dot{r}_1 = -D_{13}r_1 - \alpha_{33}^{01}(Q_1 + P_1) \\
A_2^{'}\dot{p}_2 + (C_2 - A_2^{'})q_2r_2 + s_1a_2\left[(\dot{p}_1 - q_1r_1)\alpha_{22}^{12} - (\dot{q}_1 + p_1r_1)\alpha_{12}^{12} + (p_1^2 + q_1^2)\alpha_{32}^{12}\right] = \\
= a_2g\alpha_{32}^{02} - D_{21}p_1 - \alpha_{31}^{02}P_2, \\
A_2^{'}\dot{q}_2 - (C_2 - A_2^{'})p_2r_2 - s_1a_2\left[(\dot{p}_1 - q_1r_1)\alpha_{21}^{12} - (\dot{q}_1 + p_1r_1)\alpha_{11}^{12} + (p_1^2 + q_1^2)\alpha_{31}^{12}\right] = \\
= -a_2g\alpha_{31}^{02} - D_{21}q_2 - \alpha_{32}^{02}P_2, \\
C_2\dot{r}_2 = -D_{23}r_2 - \alpha_{33}^{02}(Q_2 + P_2).
\end{gathered} \tag{1.4}$$

К системе уравнений (1.4) следует добавить уравнения для направляющих косинусов [6]

$$\begin{gathered}
\dot{\alpha}_{11}^{i0} = -q_i\alpha_{31}^{i0} + r_i\alpha_{21}^{i0}, \quad \dot{\alpha}_{21}^{i0} = p_i\alpha_{31}^{i0} - r_i\alpha_{11}^{i0}, \\
\dot{\alpha}_{12}^{i0} = -q_i\alpha_{32}^{i0} + r_i\alpha_{22}^{i0}, \quad \dot{\alpha}_{22}^{i0} = p_i\alpha_{32}^{i0} - r_i\alpha_{12}^{i0}, \\
\dot{\alpha}_{13}^{i0} = -q_i\alpha_{33}^{i0} + r_i\alpha_{23}^{i0}, \quad \dot{\alpha}_{23}^{i0} = p_i\alpha_{33}^{i0} - r_i\alpha_{13}^{i0}, \\
\dot{\alpha}_{31}^{i0} = -p_i\alpha_{21}^{i0} + q_i\alpha_{11}^{i0}, \quad \dot{\alpha}_{32}^{i0} = -p_i\alpha_{22}^{i0} + q_i\alpha_{12}^{i0}, \\
\dot{\alpha}_{33}^{i0} = -p_i\alpha_{23}^{i0} + q_i\alpha_{13}^{i0}.
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь p_i, q_i, r_i – проекции вектора угловой скорости $\overline{\omega}_i$ твердого тела S_i^0 на оси подвижного базиса $\overline{e}_1^i\overline{e}_2^i\overline{e}_3^i$; $J_i = diag(A_i, A_i, C_i)$, $A_1^{'} = A_1 + s_1^2m_2$, $A_2^{'} = A_2$, $a_1 = m_1c_1 + m_2s_1$, $a_2 = m_2c_2$.

2. Вывод уравнений возмущенного движения в сопротивляющейся среде двух связанных гироскопов Лагранжа

Предположим, что в невозмущенном движении тело S_i вращается как одно целое с угловой скоростью $\overline{\omega}_{0i}$ вокруг вертикали. Пусть $\overline{\omega}_{0i} = \omega_{0i}\overline{e}_3^i$.

Система уравнений (1.4)–(1.5) допускает частное решение

$$\begin{gathered} p_i = q_i = 0, \quad r_i = \omega_{0i} = \frac{Q_i \pm P_i}{D_{i3}} \\ \alpha_{11}^{i0} = \cos\omega_{0i}t, \quad \alpha_{12}^{i0} = \pm\sin\omega_{0i}t, \quad \alpha_{13}^{i0} = 0, \\ \alpha_{21}^{i0} = -\sin\omega_{0i}t, \quad \alpha_{22}^{i0} = \pm\cos\omega_{0i}t, \quad \alpha_{23}^{i0} = 0, \\ \alpha_{31}^{i0} = 0, \quad \alpha_{32}^{i0} = 0, \quad \alpha_{33}^{i0} = \pm 1, \end{gathered} \tag{2.1}$$

которые соответствуют равномерным вращениям тел S_i вокруг осей $\overline{s}_i$, совпадающих с вертикалью. При этом решению (2.1) с верхним знаком соответствует случай спящих волчков (центр масс обоих находится выше неподвижной точки), а с нижним – случай статически устойчивых волчков (их центр масс находится ниже неподвижной точки). Верхний знак в выражениях $\alpha_{\mu k}^{ij}$ соответствует случаю, когда единичные векторы $\overline{e}_3^i$ и $\overline{e}_3^0$ направлены в одну сторону, а нижний – в противоположные стороны.

Для определенности в решении (2.1) выберем верхний знак и исследуем устойчивость этого решения по части переменных, которые определяют положения осей $\overline{s}_i$ в пространстве и угловые скорости твердых тел. Для этого в возмущенном движении положим $\overline{\omega}_i = \overline{\omega}_{0i} + \overline{\Omega}_i$, где $\left|\overline{\Omega}_i\right|$ является величиной первого порядка малости по сравнению с $|\overline{\omega}_{0i}|$.

Сохраняя прежние обозначения, запишем уравнения возмущенного движения

$$\begin{gathered} A_i'\dot{p}_i + (C_i - A_i')\omega_{0i}q_i + s_1a_2\left[(\dot{p}_j - \omega_{0j}q_j)\alpha_{22}^{1i} - (\dot{q}_j + \omega_{0j}p_j)\alpha_{ji}^{1i}\right] = \\ = a_ig\alpha_{23}^{i0} - D_{i1}p_i - \alpha_{31}^{0i}P_i \\ A_i'\dot{q}_i - (C_i - A_i')\omega_{0i}p_i - s_1a_2\left[(\dot{p}_j - \omega_{0j}q_j)\alpha_{ij}^{1i} - (\dot{q}_j + \omega_{0j}p_j)\alpha_{11}^{1i}\right] = \\ = a_1g\alpha_{13}^{10} - D_{11}q_i - \alpha_{32}^{01}P_1, \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$C_i\dot{r}_i = -D_{i3}r_i, \tag{2.3}$$

$$\dot{\alpha}_{13}^{i0} = \omega_{0i}\alpha_{23}^{i0} - q_i, \quad \dot{\alpha}_{23}^{i0} = -\omega_{0i}\alpha_{13}^{i0} + p_i. \tag{2.4}$$

Здесь $i,k = 1,2$, $j = 3-i$, $\alpha_{11}^{ik} = \cos\varphi_{ki}$, $\alpha_{12}^{ik} = -\sin\varphi_{ki}$, $\alpha_{21}^{ik} = \sin\varphi_{ki}$, $\alpha_{22}^{ik} = \cos\varphi_{ki}$, $\varphi_{ki} = \varphi_k - \varphi_i$, $\varphi_i = \omega_{0i}t$.

Уравнение (2.3) отделяется от остальных уравнений и его характеристическое уравнение имеет один действительный отрицательный корень.

Перейдем к новым переменным p_i' , q_i' , α_{13}^i , α_{23}^i [7]

$$\begin{gathered} p_i' = p_i\sin\varphi_i + q_i\cos\varphi_i, \quad q_i' = p_i\cos\varphi_i - q_i\sin\varphi_i, \\ \alpha_{13}^i = \alpha_{13}^{0i}\sin\varphi_i + \alpha_{23}^{0i}\cos\varphi_i, \quad \alpha_{23}^i = \alpha_{13}^{0i}\cos\varphi_i - \alpha_{23}^{0i}\sin\varphi_i. \end{gathered}$$

и положим $\Omega_i = q_i' - ip_i'$, $\gamma_i = \alpha_{13}^i + i\alpha_{23}^i$, тогда в новых переменных система уравнений (2.2) и (2.4) запишется так

$$A_i'\ddot{\gamma}_i + (iC_i\omega_{0i} + D_{i1})\dot{\gamma}_i + s_1a_2\ddot{\gamma}_j = (a_ig - iP_1)\gamma_i, (i = 1,2,\ j = 3-i). \tag{2.5}$$

Здесь и далее следует различать нижний индекс $i = 1,2$ от мнимой единицы.

В отличии от работы [8] уравнения (2.5) определяется уже четырьмя степенями свободы и описывают движение линейной механической системы, находящейся под действием диссипативных, потенциальных, гироскопических и циркуляционных сил.

3. Асимптотическая устойчивость равномерных вращений в сопротивляющейся среде двух связанных гироскопов Лагранжа

Представив искомые функции в виде $ae^{\lambda t}$, запишем характеристическое уравнение возмущенного движения (2.5) в виде

$$\begin{vmatrix} F_1 & -\mu\lambda^2 \\ -\mu\lambda^2 & F_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.1}$$

или

$$\lambda^4 + (a_3 + ib_3)\lambda^3 + (\widetilde{a}_2 + ib_2)\lambda^2 + (\widetilde{a}_1 + ib_1)\lambda + a_0 + ib_0 = 0, \tag{3.2}$$

где $F_i = A_i'\lambda^2 + (i\widetilde{C}_i + D_{i1})\lambda - a_i g + i\widetilde{P}_i$, $\mu = s_1 a_2$, $\widetilde{C}_i = C_i\omega_{0i}$, $\widetilde{P}_i = Q_i + P_i$.

$$a_3 = \frac{A_1'D_{21} + A_2'D_{11}}{a_4} > 0, \quad b_3 = \frac{A_1'\widetilde{C}_2 + A_2'\widetilde{C}_1}{a_4} > 0,$$

$$\widetilde{a}_2 = \frac{D_{11}D_{21} - \widetilde{C}_1\widetilde{C}_2}{a_4} - \frac{(A_1'a_2 + A_2'a_1)g}{a_4}, \tag{3.3}$$

$$b_2 = \frac{\widetilde{C}_1D_{21} + \widetilde{C}_2D_{11} + A_1'\widetilde{P}_2 + A_2'\widetilde{P}_1}{a_4}, \quad \widetilde{a}_1 = \frac{(a_1D_{21} + a_2D_{11})g - \widetilde{C}_1\widetilde{P}_2 - \widetilde{C}_2\widetilde{P}_1}{a_4},$$

$$b_1 = \frac{(a_1\widetilde{C}_2 + a_2\widetilde{C}_1)g + \widetilde{P}_1D_{21} + \widetilde{P}_2D_{11}}{a_4}, \quad a_0 = \frac{a_1a_2g - \widetilde{P}_1\widetilde{P}_2}{a_4},$$

$$b_0 = -\frac{(a_1\widetilde{P}_2 + a_2\widetilde{P}_1)g}{a_4},$$

$$a_4 = A_1'A_2' - \mu^2 = A_1A_2 + \widetilde{A}_2s_1^2m_2 > 0, \quad \widetilde{C}_i = C_i\omega_{0i},$$

$\widetilde{A}_2$ – экваториальный момент инерции второго тела относительно его центра масс.

При отсутствии диссипации $(D_{i1} = D_{i3} = 0)$, постоянных моментов $(Q_i = P_i = 0)$ и при замене λ на $i\lambda$ уравнение (3.2) совпадает с уравнением работ [5–7].

Исследование характеристического уравнения (3.2) будем проводить с помощью иннорного подхода. Согласно критерию Льенара-Шипара [10], для существования асимптотически устойчивых решений необходимо и достаточно, чтобы матрица седьмого порядка, составленная из коэффициентов многочлена (3.2) была иннорно-положительной, т.е. были положительно определены матрицы Δ_1, Δ_3, Δ_5 и Δ_7:

$$I_1 = |\Delta_1| = a_3 = \frac{A_1'D_{21} + A_2'D_{11}}{a_4} > 0, \tag{3.4}$$

$$I_3 = |\Delta_3| = \begin{vmatrix} 1 & -b_3 & -\widetilde{a}_2 \\ 0 & a_3 & -b_2 \\ a_3 & -b_2 & -\widetilde{a}_1 \end{vmatrix} > 0, \tag{3.5}$$

$$I_5 = |\Delta_5| = \begin{vmatrix} 1 & -b_3 & -\widetilde{a}_2 & b_1 & 0 \\ 0 & 1 & -b_3 & -\widetilde{a}_2 & b_1 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -\widetilde{a}_1 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -\widetilde{a}_1 & b_0 \\ a_3 & -b_2 & -\widetilde{a}_1 & b_0 & 0 \end{vmatrix} > 0, \tag{3.6}$$

$$I_7 = |\Delta_7| = \begin{vmatrix} 1 & -b_3 & -\widetilde{a}_2 & b_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b_3 & -\widetilde{a}_2 & b_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -b_3 & -\widetilde{a}_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -\widetilde{a}_1 & b_0 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -\widetilde{a}_1 & b_0 & 0 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -\widetilde{a}_1 & b_0 & 0 & 0 \\ a_3 & -b_1 & -\widetilde{a}_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0 \qquad (3.7)$$

Так как $a_3 > 0$, то условия асимптотической устойчивости равномерных вращений в сопротивляющейся среде двух гироскопов Лагранжа, связанных сферическим шарниром, определяется тремя неравенствами (3.5)–(3.7).

Условия устойчивости решения (2.1) с нижним знаком также будут следовать из неравенств (3.5)–(3.7), в которых нужно будет заменить $\widetilde{P}_i = Q_i + P_i$ на $\widetilde{P}_i = Q_i - P_i$ и считать $a_1 < 0$, $a_2 < 0$.

Из неравенства (3.4) следует, что при отсутствии частичной диссипации

$$(D_{11} = D_{21} = 0)$$

коэффициент $a_3 = 0$ и асимптотическая устойчивость равномерных вращений невозможна.

Случай универсального шарнира (шарнира Гука) $(\omega_{01} = \omega_{02} = \omega)$. В этом случае, положив в коэффициентах (3.3) $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega((Q_1 + P_1)D_{23} = = (Q_2 + P_2)D_{13})$, получим: $b_1 = 0$,

$$b_3 = b_{31}\omega,\ b_{31} = \frac{A_1'\widetilde{C}_2 + A_2'\widetilde{C}_1}{a_4},\ \widetilde{a}_2 = \widetilde{a}_{21} - \widetilde{a}_{22}\omega^2,\ \widetilde{a}_{21} = \frac{D_{11}D_{21} - (A_1'a_2 + A_2'a_1)g}{a_4},$$

$$\widetilde{a}_{22} = \frac{\widetilde{C}_1\widetilde{C}_2}{a_4}, \quad b_2 = b_{21}\omega + b_{22}, \quad b_{21} = \frac{C_1D_{21} + C_2D_{11}}{a_4}, \quad b_{22} = \frac{A_1'P_2 + A_2'P_1}{a_4},$$

Коэффициенты $a_0, \widetilde{a}_1, a_3$ не меняются, а первое неравенство $I_3 > 0$ примет вид квадратного неравенства относительно ω

$$(a_3b_{31} - b_{21})b_{21}\omega^2 - (a_3^2\widetilde{a}_{22} - a_3b_{22}b_{31} + 2b_{21}b_{22})\omega - \widetilde{a}_1a_3 + a_3^2\widetilde{a}_{21} - b_{22} > 0$$

невыполнение которого ведет к асимптотической неустойчивости.

Случай одного гироскопа $(A_2 = C_2 = m_2 = P_2 = Q_2 = D_{11} = D_{13} = 0)$. В этом случае характеристическое уравнение (3.2) принимает вид

$$\lambda^2 + (\widetilde{a}_1 + ib_1)\lambda + a_0 + ib_0 = 0,$$

где

$$\widetilde{a}_1 = \frac{D_{11}}{\widetilde{a}_2},\ b_1 = \frac{\widetilde{C}_1}{\widetilde{a}_2},\ a_0 = -\frac{a_1}{\widetilde{a}_2}g,\ b_0 = \frac{\widetilde{P}_1}{\widetilde{a}_2},\ \widetilde{a}_2 = A_1' > 0 \qquad (3.8)$$

и для существования асимптотически устойчивых решений необходимо и достаточно, чтобы были положительно определены матрицы Δ_1 и Δ_3:

$$I_1 = \widetilde{a}_1 = \frac{D_{11}}{\widetilde{a}_2} > 0,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -b_3 & -\widetilde{a}_2 \\ 0 & a_3 & -b_2 \\ a_3 & -b_2 & 0 \end{vmatrix} = a_3 a_3 \widetilde{a}_2 + b_2(a_3 b_3 - b_2) > 0. \tag{3.9}$$

С учетом (3.8) неравенство (3.9) примет вид

$$D_{11}\widetilde{P}_1\widetilde{C}_1 - \Gamma D_{11}^2 - A_1\widetilde{P}_1^2 > 0. \tag{3.10}$$

Здесь $\Gamma = a_1 g$.

При отсутствии постоянных моментов $(P_1 = Q_1 = 0)$ или при $\widetilde{P}_1 = 0$ для статически уравновешенного гироскопа $(\Gamma < 0)$ неравенство (3.10) всегда выполнено, а для неуравновешенных гироскопов $(\Gamma > 0)$ не выполняется. Из неравенства (3.10) также следует, что в случае отсутствия частичной диссипации $(D_{11} = 0)$ асимптотическая устойчивость также невозможна. Все это не противоречит физическому смыслу. Следует отметить, что неравенство (3.10) совпадает с неравенством работы [8].

4. Выводы

Условия асимптотической устойчивости равномерного вращения в сопротивляющейся среде двух тяжелых гироскопов Лагранжа, связанных сферическим шарниром, определяются тремя неравенствами. Нижний гироскоп имеет неподвижную точку. Вращение каждого гироскопа поддерживаются постоянными моментами в инерциальной и неинерциальной систем координат. В случае отсутствия одного из гироскопов вновь полученное условие устойчивости совпадают с известным. Рассмотрен случай вырождения сферического шарнира в универсальный шарнир (шарнир Гука). Показано, что невыполнение квадратного неравенства относительно угловой скорости собственного вращения ведет к неустойчивости.

Исследования выполнены в рамках программы фундаментальных исследований Министерства образования и науки, проект № 0119U100042.

Литература

[1] *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел. Механика твердого тела, 1972. Вып. 4. С. 52–73.

[2] *Савченко А.Я.* Устойчивость стационарных движений механических систем. К.: Наук. думка, 1977. 160 с.

[3] *Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А.* Устойчивость движения систем связанных твёрдых тел. К.: Наук. думка, 1991. 166 с.

[4] *Болграбская И.А., Лесина М.Е., Чебанов Д.А.* Динамика систем связанных твёрдых тел. Серия "Задачи и методы: математика, механика, кибернетика". ИПММ НАН Украины, Том 9. К.: Наукова Думка, 2012. 395 с.

[5] *Лещенко Д.Д.* Эволюция вращения твердого тела, близких к случаю Лагранжа. Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем: процессы, модели, эксперимент. 2 (6), 1998. С. 32-37.

[6] *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д.* Эволюция движения твердого тела относительно центра масс. М. Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2015. 308 с.

[7] *Felix L. Chernousko, Leonid D. Akulenko, Dmytro D. Leshchenko.* Evolution of the Motions of a Rigid Body About its Centre of Mass. Springer International Publishing AG 2017. 243 p.

[8] *Карапетян А.В., Лагутина И.С.* О влиянии диссипативного и постоянного моментов на вид и устойчивость стационарных движений волчка Лагранжа. Изв. РАН. Механика твёрдого тела, 1998. №5. С. 29–33.

[9] *Карапетян А. В.* О стационарных движениях влияниях волчка Лагранжа с возбуждением в сопротивляющейся среде. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, Механика, 2000. №5. С. 39–43.

[10] *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука, 1979. 304 с.

Kononov Yu. M., Sviatenko Ya. I.

[1] *Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,*
Institute of Applied Mathematics and Mechanics National Academy of Science of Ukraine
[2] *postgraduate student of the Department of Applied Mechanics and Computer Technologies,*
Vasyl' Stus Donetsk National University

ON THE SUBJECT OF INFLUENCE OF DISSIPATIVE AND TWO PERMANENT MOMENTS ON THE STABILITY OF UNIFORM ROTATIONS OF THE CONNECTED GYROSCOPS OF LAGRANGE

SUMMARY

Based on the innore approach, the conditions for the asymptotic stability of uniform rotation in the resisting medium of two Lagrange heavy gyroscopes connected by a spherical hinge are obtained in the form of a system of three inequalities. The bottom gyro has a fixed point. The rotation of each gyroscope is supported by a constant moment in the inertial coordinate system and in the coordinate system associated with the rigid body. In the absence of one of the gyroscopes, the newly obtained stability condition coincides with the known one. The case of spherical hinge degeneration into a universal hinge (Hooke hinge) is considered. It is shown that non-fulfillment of the square inequality with respect to the angular velocity of the self-rotation leads to instability.

Key words: *dynamically symmetric rigid bodies, spherical hinge, resisting environment, uniform rotations, asymptotic stability.*

Кононов Ю. М., Святенко Я. І.

[1] *доктор фізико-математичних наук, професор,*
Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України
[2] *аспірант кафедри прикладної механіки і комп'ютерних технологій,*
Донецький національний університет імені Василя Стуса

ПРО ВПЛИВ ДИСИПАТИВНОГО І ДВОХ ПОСТІЙНИХ МОМЕНТІВ НА СТІЙКІСТЬ РІВНОМІРНИХ ОБЕРТАНЬ ЗВ'ЯЗАНИХ ГІРОСКОПІВ ЛАГРАНЖА

РЕЗЮМЕ

На підставі іннорного підходу отримані у вигляді системи трьох нерівностей умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання в середовищі з опором двох важких гіроскопів Лагранжа, пов'язаних сферичним шарніром. Нижній гіроскоп має нерухому точку. Обертання кожного гіроскопа підтримується постійним моментом в інерціальній системі координат і в системі координат, пов'язаної з твердим тілом. У разі відсутності одного з гіроскопів знову отримана умова стійкості збігається з відомим. Розглянуто випадок виродження сферичного шарніра в універсальний шарнір (шарнір Гука). Показано, що невиконання квадратної нерівності щодо кутової швидкості власного обертання веде до нестійкості.

Ключові слова: *динамічно симетричні тверді тіла, сферичний шарнір, середовище з опором, рівномірне обертання, асимптотична стійкість.*