УДК 512.579

Жучок Ю.В.

Доктор фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри алгебри та системного аналізу, Луганський національний університет імені Тараса Шевченка (м. Старобільськ)

ПРО ЗОБРАЖЕННЯ ДОПЕЛЬНАПІВГРУП

У статті наведено приклади (впорядкованих) допельнапівгруп та досліджено деякі зображення допельнапівгруп.

Ключові слова: *допельнапівгрупа, зображення, впорядкована допельнапівгрупа, напівгрупа.*

Вступ

Поняття допельалгебри було введено Б. Ріхтер [1] у контексті алгебраїчної K-теорії. *Допельалгебра* – це векторний простір над полем з двома бінарними лінійними асоціативними операціями $\dashv$ і $\vdash$, які задовольняють такі тотожності:

$$(D_1) \quad (x \dashv y) \vdash z = x \dashv (y \vdash z)\,,$$
$$(D_2) \quad (x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z)\,.$$

Алгебраїчна система, яка складається з непорожньої множини разом з двома бінарними асоціативними операціями $\dashv$ та $\vdash$, що задовольняють умови (D_1) та (D_2), представляє окремий інтерес у теорії напівгруп. Такі алгебри були вперше розглянуті в [3] і пізніше названі як допельнапівгрупи в [2]. Отже, допельалгебри є лінійними аналогами допельнапівгруп. До перших результатів про допельнапівгрупи можна віднести опис таких вільних об'єктів як вільна допельнапівгрупа, вільна комутативна допельнапівгрупа й вільна n-нільпотентна допельнапівгрупа та характеризацію деяких найменших конгруенцій на вільній допельнапівгрупі, а також побудову вільного добутку допельнапівгруп [2]. Допельнапівгрупи мають тісні зв'язки з такими алгебрами як напівгрупи, дуплекси [3], інтерасоціативні напівгрупи [4, 5], рестриктивні бінапівгрупи [6, 7], n-кратні напівгрупи та n-кратні алгебри асоціативного типу [8], дімоноїди та діалгебри [9–11], тріоїди та триалгебри [12–14], а також деякі інші системи (див., напр., [15]). Якщо операції допельнапівгрупи збігаються, то допельнапівгрупа перетворюється у напівгрупу. Більше інформації про допельнапівгрупи можна знайти, наприклад, у роботах [16, 17].

Як відомо, кожна напівгрупа ізоморфна напівгрупі перетворень деякої множини. Подібний результат для класу впорядкованих напівгруп був отриманий К. А. Зарецьким [18], де було показано, зокрема, що кожна впорядкована напівгрупа може бути занурена в упорядковану напівгрупу всіх бінарних відношень на деякій множині. Аналоги теореми Келі для напівгруп у класі дімоноїдів та згаданої теореми Зарецького в класі впорядкованих дімоноїдів були отримані в [10] та [19] відповідно, а для класу впорядковнаих допельнапівгруп – в [20]. У цій статті наведено приклади допельнапівгруп і впорядкованих допельнапівгруп та досліджено новий тип зображень допельнапівгруп.

1. Допельнапівгрупи та їх зображення

Розглянемо спочатку кілька прикладів допельнапівгруп.

Нехай $(S_1, *_1)$ та $(S_2, *_2)$ — напівгрупи з нулями 0_1 та 0_2 відповідно. На множині $S = S_1 \times S_2$ визначимо дві бінарні операції $\dashv$ і $\vdash$ за правилами:

$$(a, b) \dashv (c, d) = (a *_1 c, 0_2),$$

$$(a, b) \vdash (c, d) = (0_1, b *_2 d).$$

Твердження 1. *Алгебраїчна система* $(S, \dashv, \vdash)$ *є допельнапівгрупою.*

Доведення. Для всіх $(a, b), (c, d), (e, f) \in S$ маємо

$$((a, b) \dashv (c, d)) \dashv (e, f) = (a *_1 c, 0_2) \dashv (e, f) =$$

$$= (a *_1 c *_1 e, 0_2) = (a, b) \dashv (c *_1 e, 0_2) =$$
$$= (a, b) \dashv ((c, d) \dashv (e, f)),$$
$$((a, b) \vdash (c, d)) \vdash (e, f) = (0_1, b *_2 d) \vdash (e, f) =$$
$$= (0_1, b *_2 d *_2 f) = (a, b) \vdash (0_1, d *_2 f) =$$
$$= (a, b) \vdash ((c, d) \vdash (e, f)),$$

і отже, операції $\dashv$ та $\vdash$ є асоціативними. Більш того,

$$((a, b) \dashv (c, d)) \vdash (e, f) = (a *_1 c, 0_2) \vdash (e, f) =$$

$$= (0_1, 0_2) = (a, b) \dashv (0_1, d *_2 f) =$$
$$= (a, b) \dashv ((c, d) \vdash (e, f)),$$
$$((a, b) \vdash (c, d)) \dashv (e, f) = (0_1, b *_2 d) \dashv (e, f) =$$
$$= (0_1, 0_2) = (a, b) \vdash (c *_1 e, 0_2) =$$
$$= (a, b) \vdash ((c, d) \dashv (e, f)).$$

Твердження доведено.

Нехай $(D, \dashv, \vdash)$ — довільна допельнапівгрупа і $\mathscr{D} = D \times D$. Визначимо на $\mathscr{D}$ дві бінарні операції $\prec$ та $\succ$ за правилами:

$$(a, b) \prec (c, d) = (a \dashv c, b \dashv c),$$

$$(a, b) \succ (c, d) = (a \vdash d, b \vdash d).$$

Твердження 2. *Алгебраїчна система* $(\mathscr{D}, \prec, \succ)$ *є допельнапівгрупою.*

Доведення. Використовуючи аксіоми допельнапівгрупи $(D, \dashv, \vdash)$, для всіх (a, b), (c, d), (e, f) з $\mathscr{D}$ маємо

$$((a, b) \prec (c, d)) \prec (e, f) = (a \dashv c, b \dashv c) \prec (e, f) =$$

$$= (a \dashv c \dashv e, b \dashv c \dashv e) = (a, b) \prec (c \dashv e, d \dashv e) =$$
$$= (a, b) \prec ((c, d) \prec (e, f)),$$
$$((a, b) \succ (c, d)) \succ (e, f) = (a \vdash d, b \vdash d) \succ (e, f) =$$

$$= (a \vdash d \vdash f, b \vdash d \vdash f) = (a, b) \succ (c \vdash f, d \vdash f) =$$
$$= (a, b) \succ ((c, d) \succ (e, f)),$$
$$((a, b) \prec (c, d)) \succ (e, f) = (a \dashv c, b \dashv c) \succ (e, f) =$$
$$= (a \dashv c \vdash f, b \dashv c \vdash f) = (a, b) \prec (c \vdash f, d \vdash f) =$$
$$= (a, b) \prec ((c, d) \succ (e, f)),$$
$$((a, b) \succ (c, d)) \prec (e, f) = (a \vdash d, b \vdash d) \prec (e, f) =$$
$$= (a \vdash d \dashv e, b \vdash d \dashv e) = (a, b) \succ (c \dashv e, d \dashv e) =$$
$$= (a, b) \succ ((c, d) \prec (e, f)).$$

Твердження доведено.

Отриману допельнапівгрупу будемо позначати через $S[(D, \dashv, \vdash)]$.

Двоїстим чином можна визначити таку допельнапівгрупу. Нехай $(D, \dashv, \vdash)$ — довільна допельнапівгрупа. Визначимо на прямому добутку $\mathscr{D} = D \times D$ дві бінарні операції $\prec$ та $\succ$ за правилами:

$$(a, b) \prec (c, d) = (a \dashv c, a \dashv d),$$
$$(a, b) \succ (c, d) = (b \vdash c, b \vdash d).$$

Твердження 3. *Алгебраїчна система $(\mathscr{D}, \prec, \succ)$ є допельнапівгрупою.*

Доведення. Аналогічно як твердження 2.

Через $(\mathscr{T}(X), \circ)$ позначається симетрична напівгрупа на множині X.

Основним результатом цієї статті є така теорема.

Теорема 1. *Будь-яка допельнапівгрупа ізоморфно занурюється у допельнапівгрупу*

$$S[(\mathscr{T}(X), \circ, \circ)]$$

для деякої множини X.

Доведення. Нехай $(D, \dashv, \vdash)$ – довільна допельнапівгрупа, D^1 – множина D із зовнішньо приєднаним елементом $1 \notin D$, таким що $1 \dashv x = x$ та $1 \vdash x = x$ для всіх $x \in D^1$.

Для кожного $x \in D$ визначимо такі два перетворення множини D^1:

$$\rho_x^{\dashv} : D^1 \to D^1 : a \mapsto a \dashv x,$$
$$\rho_x^{\vdash} : D^1 \to D^1 : a \mapsto a \vdash x.$$

Використовуючи асоціативність операцій $\dashv$ і $\vdash$, а також допельнапівгрупові аксіоми (D_1) та (D_2), можна показати, що умови

$$\text{(i)}\ \ \rho_x^{\dashv} \circ \rho_y^{\dashv} = \rho_{x \dashv y}^{\dashv},$$
$$\text{(ii)}\ \ \rho_x^{\vdash} \circ \rho_y^{\vdash} = \rho_{x \vdash y}^{\vdash},$$
$$\text{(iii)}\ \ \rho_x^{\dashv} \circ \rho_y^{\vdash} = \rho_{x \vdash y}^{\dashv},$$

$$\text{(iv)}\ \ \rho_x^{\vdash}\circ\rho_y^{\dashv}=\rho_{x\dashv y}^{\vdash}$$

виконуються для всіх $x, y \in D$.

Далі визначимо відображення з $(D,\dashv,\vdash)$ у допельнапівгрупу $S[(\mathscr{T}(D^1),\circ,\circ)]$ за правилом:

$$\eta : (D,\dashv,\vdash)\to S[(\mathscr{T}(D^1),\circ,\circ)] : x\mapsto \rho_x,$$

де $\rho_x=(\rho_x^{\dashv},\,\rho_x^{\vdash}), x\in D$.

Беручи до уваги рівності (i)–(iv), для всіх $x, y\in D$ отримуємо

$$x\eta\prec y\eta=\rho_x\prec\rho_y=(\rho_x^{\dashv},\,\rho_x^{\vdash})\prec(\rho_y^{\dashv},\,\rho_y^{\vdash})=$$
$$=(\rho_x^{\dashv}\circ\rho_y^{\dashv},\,\rho_x^{\vdash}\circ\rho_y^{\dashv})=(\rho_{x\dashv y}^{\dashv},\rho_{x\dashv y}^{\vdash})=$$
$$=\rho_{x\dashv y}=(x\dashv y)\eta,$$
$$x\eta\succ y\eta=\rho_x\succ\rho_y=(\rho_x^{\dashv},\,\rho_x^{\vdash})\succ(\rho_y^{\dashv},\,\rho_y^{\vdash})=$$
$$=(\rho_x^{\dashv}\circ\rho_y^{\vdash},\,\rho_x^{\vdash}\circ\rho_y^{\vdash})=(\rho_{x\vdash y}^{\dashv},\rho_{x\vdash y}^{\vdash})=$$
$$=\rho_{x\vdash y}=(x\vdash y)\eta.$$

Таким чином, η є гомоморфізмом $(D,\dashv,\vdash)$ у $S[(\mathscr{T}(D^1),\circ,\circ)]$.

Припустимо, що $x\neq y$ для деяких $x,y\in D$. Тоді

$$1\rho_x^{\dashv}=1\dashv x=x,\ \ 1\rho_y^{\dashv}=1\dashv y=y,$$

отже, $\rho_x\neq\rho_y$, тобто η є ін'єктивним.

Теорему доведено.

2. Впорядковані допельнапівгрупи

Нехай $(D,\dashv,\vdash)$ — довільна допельнапівгрупа і $\leqslant$ — частковий порядок на D. Алгебраїчна система $(D,\dashv,\vdash,\leqslant)$ називається *впорядкованою допельнапівгрупою* [20], якщо відношення порядку $\leqslant$ є стабільним відносно кожної з операцій $\dashv$ та $\vdash$, тобто з $x\leqslant y$ випливає, що

$$z\star x\leqslant z\star y \text{ і } x\star z\leqslant y\star z$$

для всіх $x,y,z\in D$ та $\star\in\{\dashv,\vdash\}$.

Наведемо тепер приклади впорядкованих допельнапівгруп.

Очевидно, що кожна допельнапівгрупа може бути розглянута як упорядкована допельнапівгрупа відносно відношення рівності. Тому теорема 1 справджується для тривіально впорядкованих допельнапівгруп.

Легко бачити також, що коли $(S,\cdot,\leqslant)$ – довільна впорядкована напівгрупа, то $(S,\cdot,\cdot,\leqslant)$ є впорядкованою допельнапівгрупою.

Нехай $(S,*)$ – довільна напівгрупа і $a\in S$. Визначимо на S нову бінарну операцію $*_a$ за правилом:

$$x *_a y = x*a*y$$

для всіх $x,y\in S$. Зрозуміло, що $(S,*_a)$ є напівгрупою. Ця напівгрупа називається *варіантом* напівгрупи $(S,*)$, або *сендвіч-напівгрупою* напівгрупи $(S,*)$ відносно елемента a.

Використовуючи лему 2.1 [2], безпосередньо отримуємо таке твердження.

Твердження 4. *Нехай $(S,*,\leqslant)$ – упорядкований моноїд і $a,b\in S$. Алгебраїчна система $(S,*_a,*_b,\leqslant)$ є впорядкованою допельнапівгрупою.*

Відмітимо, що коли принаймні один з елементів a або b з твердження 4 є одиницею напівгрупи $(S,*)$, ми отримуємо впорядковані допельнапівгрупи $(S,*,*,\leqslant)$, $(S,*,*_b,\leqslant)$ та $(S,*_a,*,\leqslant)$.

Нехай X — довільна непорожня множина, $F[X]$ — вільна напівгрупа на X, і T — вільний моноїд на фіксованій 2-елементній множині $\{a,b\}$ з порожнім словом θ. Довжина слова $w \in F[X] \cup T$ позначається через l_w.

Визначимо дві бінарні операції $\dashv$ і $\vdash$ на множині

$$FDS(X) = \{(u,v) \in F[X] \times T \,|\, l_u - l_v = 1\}$$

за правилами:

$$(u_1,v_1) \dashv (u_2,v_2) = (u_1u_2, v_1av_2),$$
$$(u_1,v_1) \vdash (u_2,v_2) = (u_1u_2, v_1bv_2)$$

для всіх $(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in FDS(X)$.

Зафіксуємо лінійні порядки $\preceq_1$ і $\preceq_2$ на X та на множині $\{\theta,a,b\}$ відповідно, де θ – найменший елемент відносно $\preceq_2$. Лексикографічні порядки на вільній напівгрупі $F[X]$ та вільному моноїді T, які визначаються порядками $\preceq_1$ і $\preceq_2$, будемо позначати через $\preceq_{F[X]}$ і $\preceq_T$ відповідно.

Тепер визначимо бінарне відношення $\preceq$ на $FDS(X)$ наступним чином:

$$(u_1,v_1) \preceq (u_2,v_2) \Leftrightarrow u_1 \preceq_{F[X]} u_2 \ \& \ v_1 \preceq_T v_2.$$

Беручи до уваги теорему 3.5 [2], отримуємо ще один приклад упорядкованої допельнапівгрупи.

Твердження 5. *Алгебраїчна система $(FDS(X),\dashv,\vdash,\preceq)$ є впорядкованою допельнапівгрупою.*

Нехай $(N,+)$ — адитивна напівгрупа всіх натуральних чисел і $N_{\tilde{2}} = N \cup \{\tilde{2}\}$, де $\tilde{2} \notin N$. Визначимо бінарні операції $\dashv$ і $\vdash$ на $N_{\tilde{2}}$ за такими правилами:

$$\tilde{2} \dashv \tilde{2} = \tilde{2} \vdash \tilde{2} = 4,$$

$$m \dashv n = m + n,$$
$$m \dashv \tilde{2} = \tilde{2} \dashv m = m \vdash \tilde{2} = \tilde{2} \vdash m = m + 2,$$
$$m \vdash n = \begin{cases} \tilde{2}, & m = n = 1, \\ m + n & \textit{в інших випадках} \end{cases}$$

для всіх $m,n \in N$. Згідно з твердженням 3 [21] $(N_{\tilde{2}},\dashv,\vdash)$ є комутативним дімоноїдом, а тоді за твердженням 1.1.6 [17] і допельнапівгрупою.

Розглянемо звичайне арифметичне відношення порядку $\leqslant$ на N і розширимо це відношення до $N_{\tilde{2}}$ у такий спосіб:

$$1 \leqslant \tilde{2} \leqslant 3 \leqslant 4 \leqslant ...,$$

при цьому елементи 2 і $\tilde{2}$ є непорівняними відносно $\leqslant$.

Твердження 6. *[20] Алгебраїчна система $(N_{\tilde{2}},\dashv,\vdash,\leqslant)$ є впорядкованою допельнапівгрупою.*

Нехай X – довільна непорожня множина, $\overline{X}$ — копія множини X, тобто $\overline{X} = \{\overline{x} \,|\, x \in X\}$, і нехай $\mathscr{X} = X \cup \overline{X}$.

На множині $B(\mathscr{X})$ всіх бінарних відношень на множині $\mathscr{X}$ визначимо дві бінарні операції $\circ_1$ і $\circ_2$ такими умовами:

$$\alpha \circ_1 \beta = (\alpha \cap (X \times X)) \circ \beta,$$
$$\alpha \circ_2 \beta = (\alpha \cap (\overline{X} \times \overline{X})) \circ \beta,$$

де $\circ$ – звичайна композиція бінарних відношень.

Твердження 7. *Алгебра $(B(\mathscr{X}), \circ_1, \circ_2, \subseteq)$ є впорядкованою допельнапівгрупою відносно звичайного теоретико-множинного включення $\subseteq$.*

Доведення. Нехай $\alpha, \beta, \gamma \in B(\mathscr{X})$. Тоді

$$(\alpha \circ_1 \beta) \circ_1 \gamma = ((\alpha \cap (X \times X)) \circ \beta) \circ_1 \gamma =$$
$$= [((\alpha \cap (X \times X)) \circ \beta) \cap (X \times X)] \circ \gamma,$$
$$\alpha \circ_1 (\beta \circ_1 \gamma) = \alpha \circ_1 ((\beta \cap (X \times X)) \circ \gamma) =$$
$$= (\alpha \cap (X \times X)) \circ (\beta \cap (X \times X)) \circ \gamma.$$

Для всіх $x, y \in \mathscr{X}$ маємо

$$(x,y) \in ((\alpha \cap (X \times X)) \circ \beta) \cap (X \times X) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x,y) \in (\alpha \cap (X \times X)) \circ \beta,\ (x,y) \in X \times X \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists\, z \in \mathscr{X} : (x,z) \in \alpha \cap (X \times X),\ (z,y) \in \beta,\ (x,y) \in X \times X \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x,z) \in \alpha \cap (X \times X),\ (z,y) \in \beta,\ (z,y) \in X \times X \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x,y) \in (\alpha \cap (X \times X)) \circ (\beta \cap (X \times X)).$$

Таким чином, $(\alpha \circ_1 \beta) \circ_1 \gamma = \alpha \circ_1 (\beta \circ_1 \gamma)$ та операція $\circ_1$ є асоціативною. Аналогічно можна показати, що операція $\circ_2$ також є асоціативною.

Розглянемо добутки

$$(\alpha \circ_1 \beta) \circ_2 \gamma = ((\alpha \cap (X \times X)) \circ \beta) \circ_2 \gamma =$$
$$= [((\alpha \cap (X \times X)) \circ \beta) \cap (\overline{X} \times \overline{X})] \circ \gamma,$$
$$\alpha \circ_1 (\beta \circ_2 \gamma) = \alpha \circ_1 ((\beta \cap (\overline{X} \times \overline{X})) \circ \gamma) =$$
$$= (\alpha \cap (X \times X)) \circ (\beta \cap (\overline{X} \times \overline{X})) \circ \gamma.$$

Зрозуміло, що

$$((\alpha \cap (X \times X)) \circ \beta) \cap (\overline{X} \times \overline{X}) =$$
$$= (\alpha \cap (X \times X)) \circ (\beta \cap (\overline{X} \times \overline{X})) = \emptyset.$$

Отже, аксіома (D_1) виконується. Подібним чином можна показати виконання аксіоми (D_2).

Нарешті покажемо, що відношення $\subseteq$ є стабільним на $B(\mathscr{X})$ відносно операцій $\circ_1$ та $\circ_2$. Нехай $\alpha \subseteq \beta$ і $\gamma \in B(\mathscr{X})$. Тоді

$$\alpha \circ_1 \gamma = (\alpha \cap (X \times X)) \circ \gamma \subseteq (\beta \cap (X \times X)) \circ \gamma = \beta \circ_1 \gamma,$$
$$\gamma \circ_1 \alpha = (\gamma \cap (X \times X)) \circ \alpha \subseteq (\gamma \cap (X \times X)) \circ \beta = \gamma \circ_1 \beta.$$

Аналогічно, $\alpha \circ_2 \gamma \subseteq \beta \circ_2 \gamma$ і $\gamma \circ_2 \alpha \subseteq \gamma \circ_2 \beta$. Таким чином, $(B(\mathscr{X}), \circ_1, \circ_2, \subseteq)$ є впорядкованою допельнапівгрупою.

Твердження доведено.

Висновки

У статті наведено приклади (впорядкованих) допельнапівгруп та описано певні зображення допельнапівгруп.

References

[1] Richter B., Dialgebren, Doppelalgebren und ihre Homologie, *Diplomarbeit, Universitat Bonn.*, 1997. Available at https://www.math.uni-hamburg.de/home/richter/publications.html.

[2] Zhuchok A. V., Free products of doppelsemigroups, *Algebra Universalis* **77** (2017), 361–374.

[3] Pirashvili T., Sets with two associative operations, *Cent. Eur. J. Math.* **2** (2003), 169–183.

[4] Gorbatkov A. B., Interassociates of the free commutative semigroup, *Sib. Math. J.* **54** (2013), no. 3, 441–445.

[5] Gould M., Linton K. A., Nelson A. W., Interassociates of monogenic semigroups, *Semigroup Forum* **68** (2004), 186–201.

[6] Schein B. M., Restrictive semigroups and bisemigroups, *Technical Report. University of Arkansas, Fayetteville, Arkansas, USA*, 1989, 1–23.

[7] Schein B. M., Restrictive bisemigroups, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.* **1** (1965), no. 44, 168–179 (in Russian).

[8] Koreshkov N. A., n-tuple algebras of associative type, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.* **12** (2008), 34–42 (in Russian).

[9] Loday J.-L., Dialgebras, in: Dialgebras and related operads, *Lect. Notes Math.* **1763**, Springer-Verlag, Berlin, 2001, 7–66.

[10] Zhuchok A. V., Dimonoids, *Algebra Logic* **50** (2011), no. 4, 471–496 (in Russian).

[11] Zhuchok Yu. V., Free abelian dimonoids, *Algebra Discrete Math.* **20** (2015), no. 2, 330–342.

[12] Loday J.-L., Ronco M. O., Trialgebras and families of polytopes, *Contemporary Mathematics* **346** (2004), 369–398.

[13] Zhuchok A. V., Trioids, *Asian-European Journal of Mathematics* **8** (2015), no. 4, 1550089 (23 pages). DOI:10.1142/S1793557115500898.

[14] Zhuchok Yu. V., The endomorphism monoid of a free trioid of rank 1, *Algebra Universalis* **76** (2016), no. 3, 355–366.

[15] Zhuchok Yu. V., Automorphisms of the endomorphism semigroup of a free commutative g-dimonoid, *Algebra Discrete Math.* **21** (2016), no. 2, 295–310.

[16] Zhuchok A. V., Structure of free strong doppelsemigroups, *Commun. Algebra* **46** (2018), no. 8, 3262–3279. DOI:10.1080/00927872.2017.1407422.

[17] Zhuchok A. V., Relatively free doppelsemigroups, *Monograph series Lectures in Pure and Applied Mathematics. Germany, Potsdam: Potsdam University Press* **5** (2018), 86 p.

[18] Zaretskiy K. A., The representation of ordered semigroups by binary relations, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Math.* **6** (1959), 48–50 (in Russian).

[19] Zhuchok Yu. V., Representations of ordered dimonoids by binary relations, *Asian-European Journal of Mathematics* **7** (2014), no. 1, 1450006 (13 pages). DOI:10.1142/S1793557114500065.

[20] Zhuchok Yu. V., Koppitz J., Representations of ordered doppelsemigroups by binary relations, *Algebra Discrete Math.* **27** (2019), no. 1, 144–154.

[21] Zhuchok A. V., Free commutative dimonoids, *Algebra Discrete Math.* **9** (2010), no. 1, 109–119.

Zhuchok Yu. V.

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Professor of the Department of Algebra and System Analysis,
Luhansk Taras Shevchenko National University (Starobilsk)

ON REPRESENTATIONS OF DOPPELSEMIGROUPS

SUMMARY

We give examples (ordered) doppelsemigroups and describe some representations of doppelsemigroups.

Key words: *doppelsemigroup, representation, ordered doppelsemigroup, semigroup.*

Жучок Ю.В.

Доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры алгебры и системного анализа,
Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко (г. Старобельськ)

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ДОППЕЛЬПОЛУГРУПП

РЕЗЮМЕ

В статье приведены примеры (упорядоченных) доппельполугрупп и исследованы некоторые представления доппельполугрупп.

Ключевые слова: *доппельполугруппа, представление, упорядоченная доппельполугруппа, полугруппа.*