УДК 512.56(2-8),519.766.24

Крайнічук Г.В.

кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри радіофізики та кібербезпеки, Донецький національний університет імені Василя Стуса

ПРО КЛАСИФІКАЦІЮ УЗАГАЛЬНЕНИХ БІНАРНИХ КВАЗІГРУПОВИХ ФУНКЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ДОВЖИНИ П'ЯТЬ

У цій статті зведено всі чисті нетривіальні узагальнені бінарні квазігрупові функційні рівняння функційної довжини 5 до вивчення не більше як 52 таких рівнянь з точністю до парастрофно-первинної рівносильності. Всі вони поділені за кількістю незалежних предметних змінних та за предметним типом. Встановлено, що функційних рівнянь предметного типу (7;0;0) існує не більше двох рівнянь; типу (5;2;0) не більше 11; типу (4;3;0) не більше 18 та предметного типу (3;2;2) не більше 21 рівняння.

Ключові слова: *квазігрупа, оборотна операція, парастроф, функційне рівняння, парастрофно-первинна рівносильність.*

Вступ

У статті вивчаються функційні рівняння на квазігрупових операціях, визначених на довільному носієві, наприклад на деякій скінченній чи нескінченній множині. Під *функційним рівнянням* [1, 2], розуміється рівність двох термів, що складаються лише з функційних та предметних змінних, де всі функційні змінні є вільними, а всі предметні змінні зв'язані квантором загальності. Функційні рівняння не мають ні предметних ні функційних сталих. Це дослідження розпочалося з праць В. Д. Білоусова [2] та продовжувало розвиток в працях А. М. Чобан [3], А. Крапеж [6] та інших, які показали, що деякі набори квазігрупових функційних рівнянь можна звести до невеликої кількості таких рівнянь. Виникла проблема класифікації функційних рівнянь таким чином, що в одному класі були рівняння, які мають алгоритмічну залежність між множинами їх розв'язків. Алгоритм класифікації та методи розрізнення таких рівнянь запропонував Ф.М. Сохацький [9]. Поліпшення його результатів зробили Р. Ф. Коваль [4], А. Крапеж [7], Г. В. Крайнічук [5] та інші. Повна класифікація узагальнених бінарних квазігрупових функційних рівнянь функційної довжини 1, 2, 3 та 4 з точністю до парастрофно-первинної рівносильності дано в дисертації автора.

У цій статті досліджуються функційні рівняння функційної довжини 5 на множині квазігрупових операцій; дано повний перелік рівнянь з точністю до парастрофно-первинної рівносильності за кількістю різних незалежних предметних змінних з урахуванням їх предметних типів.

Метою даної статті є дослідження всіх класів узагальнених бінарних квазігрупових функційних рівнянь довжини 5 з точністю до парастрофно-первинної рівносильності.

Завдання даного дослідження: класифікувати узагальнені функційні рівняння довжини 5, отримати перелік відповідних представників кожного блоку розбиття за кількістю різних незалежних предметних змінних та за предметними типами.

1. Основні означення та результати

В роботі розглядаються бінарні операції, що визначені на одній множині Q. Операція f називається *лівооборотною*, якщо довільний її правий зсув є підстановкою базової множини, тобто якщо рівняння $f(x;a)=b$ має єдиний розв'язок для всіх a, b із Q. Розв'язок цього рівняння позначають через ${}^{\ell}f(b;a)$. Очевидно, що ${}^{\ell}f$ є бінарною операцією, яку називають лівим діленням (парастрофом) операції f. Так само визначається праве ділення ${}^{r}f$ операції f. Інакше ці операції можна визначити тотожностями

$$f({}^{\ell}f(x;y);y)=x,\quad {}^{\ell}f(f(x;y);y)=x,\quad f(x;{}^{r}f(x;y))=y,\quad {}^{r}f(x;f(x;y))=y. \tag{1}$$

Аналогічно визначається правооборотна операція і праве ділення (парастроф) ${}^{r}f$, для якого виконуються третя і четверта рівності із (1).

Функція f називається оборотною або квазігруповою, якщо вона є правооборотною і лівооборотною. При цьому тотожності (1) називаються визначальними або первинними, а групоїд $(Q;f)$ називається квазігрупою.

Функція ${}^{\sigma}f$ називається σ-парастрофом функції f, якщо вона визначається таким співвідношенням: ${}^{\sigma}f(x_{1\sigma};x_{2\sigma})=x_{3\sigma} \iff f(x_1;x_2)=x_3$ для будь-якого $\sigma\in S_3:=\{\iota,s,\ell,r,s\ell,sr\}$, де S_3 – симетрична група третього порядку та $s:=(12)$, $\ell:=(13)$, $r:=(23)$.

Універсальна рівність двох термів

$$(\forall F_1)(\forall F_2)\dots(\forall F_k)(\forall x_1)(\forall x_2)\dots(\forall x_n)(T_1=T_2) \tag{2}$$

називається *функційним рівнянням на Q [2]*, якщо вона має принаймні одну вільну функційну змінну, інакше вона є висловом і називається *тотожністю*, якщо цей вислів істиний та *протиріччям*, якщо цей вислів хибний. Формула (2) називається *універсальною квазігруповою рівністю*, якщо і функційні змінні, і функційні сталі є квазігруповими операціями. Функційне рівняння називається *чистим*, якщо воно не має ні функційних, ні предметних сталих [2].

Первинні квазігрупові гіпер-тотожності — це чисті квазігрупові тотожності (чисті функційні рівняння), які випливають із означення оборотних операцій та їх парастрофів. Для бінарного випадку ці тотожності такі:

$$\begin{gathered}
{}^{\sigma}({}^{\tau}F)={}^{\sigma\tau}F,\qquad {}^{s}F(x,y)=F(y,x),\quad {}^{\ell}F(F(x,y),y)=x,\quad F({}^{\ell}F(x,y),y)=x,\\
{}^{r}F(x,F(x,y))=y,\quad F(x,{}^{r}F(x,y))=y,\quad {}^{s\ell}F(x,F(y,x))=y,\quad F({}^{s\ell}F(x,y),x)=y,\\
{}^{sr}F(F(y,x),y)=x,\quad F(y,{}^{sr}F(x,y))=x.
\end{gathered} \tag{3}$$

Зауваження 1. *Зауважимо, що переіменувавши предметні змінні у функційному рівнянні, ми отримаємо різні формули, які є записами одного й того ж функційного рівняння, оскільки всі предметні змінні у цих формулах зв'язані кванторами загальності.*

Означення 1. *Кажуть, що два функційні рівняння* рівносильні на носієві*, якщо вони мають одну й ту ж множину розв'язків на даному носієві. Два чистих функційних рівняння називають* рівносильними*, якщо вони рівносильні на кожному носієві.*

Два функційні рівняння називаються *парастрофно-первинно рівносильними*, якщо одне з них можна отримати за скінченну кількість таких кроків: 1) застосування гіпертотожностей (3); 2) заміна сторін рівняння; 3) переіменування предметних змінних; 4) переіменування функційних змінних.

Два функційних рівняння називаються *парастрофно-первинно рівносильними* [9, 2], якщо одне з іншого можна отримати за скінченну кількість застосувань таких

парастрофно-первинних перетворень:
1) перейменування предметних змінних;
2) перейменування функційних змінних;
3) *перетворення за комутуванням:* заміна підтерма виду $F(\omega, \upsilon)$ термом ${}^sF(\upsilon, \omega)$;
4) *перетворення за зовнішнім діленням:* перехід від рівності виду
$F_1(\omega_1, \omega_2) = F_2(\upsilon_1, \upsilon_2)$ до рівності ${}^rF_1(\omega_1, F_2(\upsilon_1, \upsilon_2)) = \omega_2$;
5) *перетворення за внутрішнім правим (лівим) діленням через змінну* x*:* заміна підтерма $F(x, \omega)$ на x і одночасно заміна всіх інших появ змінної x термом ${}^rF(x, \omega)$ (заміна підтерма $F(\omega, x)$ на x і одночасно заміна всіх інших появ змінної x термом ${}^\ell F(\omega, x)$), якщо x не має появи в термі ω;
6) *заміна частин рівняння:* заміна рівняння $\omega = \upsilon$ на $\upsilon = \omega$.

Перетворення за комутуванням, внутрішнє ділення на підтерм через змінну та зовнішнє ділення на деякий підтерм називають парастрофно-первинними перетвореннями рівняння (в [9, 2] такі перетворення названі парастрофними).

Кажуть, що рівняння $\omega = \upsilon$ *зводиться до* рівняння $\omega' = \upsilon'$, якщо від одного до іншого можна перейти за скінченну кількість застосувань парастрофно-первинних перетворень 1)-6).

Якщо незалежна предметна змінна має точні дві появи у рівнянні, то таку предметну змінну називаємо квадратичною [5]. Отже, рівняння є квадратичним, якщо кожна предметна змінна є квадратичною. Якщо у рівнянні точно одна незалежна предметна змінна має більше двох появ, а інші незалежні предметні змінні – квадратичні, то таке рівняння називаємо майже квадратичним. Якщо у рівнянні жодна предметна змінна не є квадратичною, то таке рівняння назвемо антиквадратичним [5].

Означення 2. ([5]) *Під функційною довжиною функційного рівняння розуміємо натуральне число, яке дорівнює кількості всіх функційних змінних у рівнянні, враховуючи повторення всіх функційних змінних, як різні функційні змінні.*

Означення 3. ([5]) *Під предметною довжиною функційного рівняння розуміємо натуральне число, яке дорівнює кількості всіх появ предметних змінних у рівнянні, враховуючи повторення всіх предметних змінних, як різні предметні змінні.*

Означення 4. ([5]) *Під предметним типом рівняння від* k *різних незалежних предметних змінних розуміємо послідовність натуральних чисел* $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$*, де* m_i *позначає кількість появ у рівнянні* i*-ї незалежної предметної змінної при їх розташуванні у лексикографічному порядку.*

Оскільки ототожнюємо функційні рівняння, які відрізняються перейменуванням предметних змінних (див. зауваження 1.), то, не втрачаючи загальності, розглядатимемо лише рівняння типу $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ з умовою $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_k$.

Лема 1. ([4]) *Кожне функційне рівняння зводиться комутуванням до рівняння, в якому довільне підслово* $\upsilon_1 \cdot \upsilon_2$ *задовольняє умову* $|\upsilon_1| \leqslant |\upsilon_2|$*, а підслово* $t_1 t_2$*, — умову* $t_1 \preccurlyeq t_2$*, де* t_1*,* t_2 *— предметні змінні.*

Лема 2. ([5]) *Якщо у функційних рівняннях різна кількість різних незалежних предметних змінних, то такі рівняння парастрофно-первинно-нерівносильні.*

2. Основний результат

В цій частині статті досліджуються чисті нетривіальні узагальнені функційні рівняння функційної довжини 5 на бінарних квазігрупових операціях з точністю до парастрофно-первинної нерівносильності. Основний результат статті поданий в такій теоремі:

Теорема 1. *З точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує не більше як 52 чистих нетривіальних узагальнених бінарних квазігрупових функційних рівнянь функційної довжини* 5*, які розділені на:*

1) рівняння, що мають одну незалежну предметну змінну

предметного типу $(7,0,0)$ *— це рівняння:*

$$F_1(x;F_2(x;x)) = F_3(x;F_4(x;F_5(x;x))), \quad F_1(x;F_2(x;x))) = F_3(F_4(x;x);F_5(x;x)) \tag{4}$$

2) рівняння, що мають дві незалежні предметні змінні:

предметного типу $(5,2,0)$ *– це рівняння:*

$$F_1(x;F_2(y;y)) = F_3(F_4(x;x);F_5(x;x)), \tag{5}$$

$$F_1(x;F_2(x;x)) = F_3(F_4(x;x);F_5(y;y)), \tag{6}$$

$$F_1(x;F_2(y;y)) = F_3(x;F_4(x;F_5(x;x))), \tag{7}$$

$$F_1(x;F_2(x;y)) = F_3(F_4(x;x);F_5(x;y)), \tag{8}$$

$$F_1(x;F_2(x;x))) = F_3(F_4(x;y);F_5(x;y)), \tag{9}$$

$$F_1(y;F_2(x;y))) = F_3(F_4(x;x);F_5(x;x)), \tag{10}$$

$$F_1(y;F_2(x;x))) = F_3(F_4(x;x);F_5(x;y)), \tag{11}$$

$$F_1(x;F_2(x;y)) = F_3(x;F_4(x;F_5(x;y))), \tag{12}$$

$$F_1(y;F_2(x;x)) = F_3(y;F_4(x;F_5(x;x))), \tag{13}$$

$$F_1(y;F_2(x;x)) = F_3(x;F_4(y;F_5(x;x))), \tag{14}$$

$$F_1(y;F_2(x;y)) = F_3(x;F_4(x;F_5(x;x))), \tag{15}$$

предметного типу $(4,3,0)$ *– це рівняння:*

$$F_1(x;F_2(x;y)) = F_3(F_4(x;y);F_5(x;y)), \tag{16}$$

$$F_1(x;F_2(x;y)) = F_3(x;F_4(y;F_5(x;y))), \tag{17}$$

$$F_1(x;F_2(x;y)) = F_3(y;F_4(x;F_5(x;y))), \tag{18}$$

$$F_1(x;F_2(y;y)) = F_3(x;F_4(x;F_5(x;y))), \tag{19}$$

$$F_1(y;F_2(x;x)) = F_3(F_4(x;y);F_5(x;y)), \tag{20}$$

$$F_1(y;F_2(x;y)) = F_3(F_4(x;x);F_5(x;y)), \tag{21}$$

$$F_1(x;F_2(x;x)) = F_3(y;F_4(y;F_5(x;y))), \tag{22}$$

$$F_1(y;F_2(x;x)) = F_3(x;F_4(y;F_5(x;y))), \tag{23}$$

$$F_1(y;F_2(x;x)) = F_3(y;F_4(x;F_5(x;y))), \tag{24}$$

$$F_1(y;F_2(x;x)) = F_3(y;F_4(y;F_5(x;x))), \tag{25}$$

$$F_1(x;F_2(x;x)) = F_3(F_4(x;y);F_5(y;y)), \tag{26}$$

$$F_1(x;F_2(y;y)) = F_3(F_4(x;x);F_5(x;y)), \tag{27}$$

$$F_1(x;F_2(x;y)) = F_3(F_4(x;x);F_5(y;y)), \tag{28}$$

$$F_1(x;F_2(x;x)) = F_3(x;F_4(y;F_5(y;y))), \tag{29}$$

$$F_1(x;F_2(x;x)) = F_3(y;F_4(x;F_5(y;y))), \tag{30}$$

$$F_1(y;F_2(x;x)) = F_3(x;F_4(x;F_5(y;y))), \tag{31}$$

$$F_1(y;F_2(y;y)) = F_3(F_4(x;x);F_5(x;x)), \tag{32}$$

$$F_1(y;F_2(x;x)) = F_3(F_4(x;x);F_5(y;y)), \tag{33}$$

3) рівняння, що мають три незалежні предметні змінні

предметного типу $(3,2,2)$ *– це рівняння:*

$$F_1(x;F_2(x;x)) = F_3(F_4(y;y);F_5(z;z)), \tag{34}$$

$$F_1(x;F_2(y;y)) = F_3(F_4(x;x);F_5(z;z)), \tag{35}$$

$$F_1(x;F_2(y;y)) = F_3(x;F_4(x;F_5(z;z))), \tag{36}$$

$$F_1(y;F_2(x;x)) = F_3(F_4(x;y);F_5(z;z)), \tag{37}$$

$$F_1(y;F_2(x;y)) = F_3(F_4(x;x);F_5(z;z)), \tag{38}$$

$$F_1(x;F_2(x;x)) = F_3(y;F_4(y;F_5(z;z))), \tag{39}$$

$$F_1(y;F_2(x;x)) = F_3(x;F_4(y;F_5(z;z))), \tag{40}$$

$$F_1(y;F_2(x;x)) = F_3(y;F_4(x;F_5(z;z))), \tag{41}$$

$$F_1(x;F_2(x;x)) = F_3(F_4(y;z);F_5(y;z)), \tag{42}$$

$$F_1(y;F_2(x;x)) = F_3(F_4(x;z);F_5(y;z)), \tag{43}$$

$$F_1(x;F_2(y;z)) = F_3(F_4(x;x);F_5(y;z)), \tag{44}$$

$$F_1(y;F_2(y;z)) = F_3(F_4(x;x);F_5(x;z))), \tag{45}$$

$$F_1(y;F_2(x;x)) = F_3(y;F_4(z;F_5(x;z))), \tag{46}$$

$$F_1(x;F_2(y;y)) = F_3(F_4(x;z);F_5(x;z)), \tag{47}$$

$$F_1(x;F_2(x;z)) = F_3(F_4(y;y);F_5(x;z)), \tag{48}$$

$$F_1(x;F_2(y;y)) = F_3(x;F_4(z;F_5(x;z))), \tag{49}$$

$$F_1(y;F_2(x;z)) = F_3(y;F_4(x;F_5(x;z)), \tag{50}$$

$$F_1(x;F_2(x;z)) = F_3(F_4(F_5(x;y);y);z), \tag{51}$$

$$F_1(F_2(x;y);y) = F_3(x;F_4(F_5(x;z);z)), \tag{52}$$

$$F_1(y;F_2(x;z)) = F_3(F_4(y;F_5(x;z));x), \tag{53}$$

$$F_1(x;F_2(y;z)) = F_3(F_4(x;y);F_5(x;z)). \tag{54}$$

Доведення. В межах даного доведення, всі функційні змінні позначаємо одним і тим самим символом $(\cdot)$ і вважаємо, що різні появи цього символу позначають різні функційні змінні, оскільки в загальному рівнянні всі функційні змінні є попарно різними. Інколи $(\cdot)$ опускаємо, наприклад, за цих позначень рівняння (54) мають вигляд: $x \cdot yz = xy \cdot xz$.

Оскільки кожна предметна змінна у рівнянні має не менше двох появ, то такі рівняння предметної довжини 7 можуть мати одну, дві, або три різних незалежних предметних змінних, кожна з яких має не менше дві появи. За означенням 4. — якщо рівняння мають одну незалежну предметну змінну, то їх тип — $(7;0;0)$, якщо — дві незалежних предметних змінних, то тип таких рівнянь може бути $(5;2;0)$ та $(4;3;0)$. Якщо рівняння мають три різних незалежних предметних змінних, то тип рівняння — $(3;2;2)$.

Доведення теореми складається сумарно з доведених нижче тверджень. Розглянемо рівняння від однієї незалежної предметної змінної. Згідно з лемою 4., враховуючи різні розташування дужок, зовнішнє ділення термів та комутування, маємо, що рівняння типу $(7;0;0)$ з точністю до парастрофно-первинної рівносильності можуть мати один із виглядів з (4). Рівняння від двох різних предметних змінних класифіковані в лемі 5. Класифікацію рівнянь від трьох предметних змінних поділено на випадки, а саме рівняння з квадратами лема 6. та рівняння без квадратів (50)–(54), які знайдені разом з Ф. Сохацьким.

Отже, зі всіх рівнянь функційної довжини 5 досить вивчати не більше як 50 класів функційних рівнянь. □

Лема 3. *Чисті нетривіальні узагальнені бінарні квазігрупові функційні рівняння функційної довжини 5 існують лише чотирьох типів:* $(3;2;2)$, $(4;3;0)$, $(5;2;0)$, $(7;0;0)$.

Доведення. Оскільки всі функційні змінні в рівнянні бінарні, то загальна кількість предметних змінних дорівнює 7, враховуючи їх повторення. Оскільки рівняння квазігрупові та нетривіальні, то кожна предметна змінна повторюється принаймні два рази, тому рівняння має не більше, ніж три різні незалежні предметні змінні, тобто предметний тип рівнянь має вигляд (a,b,c), де $a,b,c \geqslant 2$ і $a+b+c=7$. Занумеруємо предметні змінні у лексикографічному порядку, які мають незростаючу кількість своїх появ. Тому досить розглядати лише рівняння із змінними x, y, z, в яких x має a появ, y — b появ, а z відповідно c появ. Тоді це лише рівняння типів (a,b,c), де $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 2$ і $a+b+c=7$. Ці умови задовольняють таким вибіркам: $(3;2;2)$, $(4;3;0)$, $(5;2;0)$, $(7;0;0)$. □

Лема 4. *Всі чисті нетривіальні узагальнені бінарні квазігрупові функційні рівняння функційної довжини 5 парастрофно-первинно рівносильні функційним рівнянням, які мають розташування дужок таких форм:*

$$A)\ 1+2=2+2, \quad B)\ 1+2=1+(1+2).$$

Доведення. З точністю до комутування, всі узагальнені рівняння функційної довжини 5 можна поділити за довжиною підтермів. Оскільки рівняння бінарні, то згідно з означенням 3. предметна довжина такого рівняння є 7. Оскільки предметна довжина рівняння – це сума довжин лівої і правої частини рівняння, то враховуючи лему 1., всі рівняння за довжиною ділимо на три види: $1=6$, $2=5$, $3=4$, де $m=n$ означає, m — предметна довжина терма лівої частини, а n – предметна довжина терма правої частини рівняння.

Вид $1=6$ може мати вигляди $1=1+5$, $1=2+4$ та $1=3+3$. Перший поділимо зовні на одиничний підтерм, отримаємо вид $2=5$, другий поділимо зовні на терм довжини два, а третій на терм довжини три, в результаті отримаємо в обох випадках вид $3=4$, враховуючи заміну частин рівняння місцями.

Вид $2 = 5$ може мати такi пiдвиди $2 = 1 + 4$ або $2 = 2 + 3$. В обох випадках зовнiшнiм дiленням на терм меншої довжини отримуємо вид $3 = 4$.

В свою чергу вид $3 = 4$ має два таких пiдвиди: $1 + 2 = 2 + 2$ та $1 + 2 = 1 + (1 + 2)$.

Отже, всi узагальненi рiвняння функцiйної довжини 5 досить розглянути за розташуванням дужок таких форм: $A)$ $1 + 2 = 2 + 2$, $B)$ $1 + 2 = 1 + (1 + 2)$. □

Лема 5. *З точнiстю до парастрофно-первинної рiвносильностi iснує не бiльше як 29 чистих нетривiальних узагальнених бiнарних квазiгрупових функцiйних рiвнянь функцiйної довжини* 5 *вiд двох рiзних предметних змiнних, якi роздiленi на:*
— предметний тип (5;2;0): це рiвняння — (5)–(15)*;*
— предметний тип (4;3;0): це рiвняння — (16)–(33).

Доведення. Розглянемо рiвняння, якi мають двi незалежнi предметнi змiннi. Оскiльки таких рiвнянь є два типи, то спочатку розглянемо тип $(5; 2; 0)$, а потiм тип $(4; 3; 0)$.

Всi рiвняння предметного типу $(5; 2; 0)$ класифiкуємо з точнiстю до комутування пiдтермiв. Оскiльки функцiйнi рiвняння мають двi предметнi змiннi, то враховуючи лексикографiчний порядок, предметну змiнну, яка має п'ять появ, позначимо через x, а змiнну, яка має двi появи — через y.

Спочатку розглянемо функцiйнi рiвняння, якi не мають квадратiв. Це означає, що пiдтерми довжини два мають появи рiзних предметних змiнних. Таких рiвнянь з розташуванням дужок $A)$ немає, оскiльки маємо три пiдтерми довжини два, а лише двi появи однiєї i тiєї ж змiнної. Для випадку $B)$ таке рiвняння одне: двi появи змiнної y знаходяться в рiзних пiдтермах довжини два, а в усiх iнших термах змiнна x. З точнiстю до комутування, отримуємо $x \cdot xy = x \cdot (x \cdot xy)$, тобто рiвняння (12).

Розглянемо рiвняння типу $(5; 2; 0)$, в яких є квадрати. Припустимо, що y^2 є пiдтермом рiвняння, тодi на всiх iнших мiсцях знаходиться x. Для випадку $A)$ маємо:

$$x \cdot y^2 = x^2 \cdot x^2, \quad x \cdot x^2 = y^2 \cdot x^2, \quad x \cdot x^2 = x^2 \cdot y^2.$$

Перше рiвняння збiгається з (5). Друге рiвняння комутуванням до третього, враховуючи лексикографiчний порядок змiнних. А третє рiвняння в точностi збiгається з (6). У випадку $B)$ маємо два такi рiвняння: $x \cdot y^2 = x \cdot (x \cdot x^2)$, $x \cdot x^2 = x \cdot (x \cdot y^2)$. Перше рiвняння збiгається з (7), а друге — за допомогою зовнiшнього дiлення двiчi на x парастрофно-первинно-рiвносильне до першого рiвняння, тобто до (7).

Розглянемо рiвняння типу $(5; 2; 0)$, в яких y^2 не є пiдтермом. Тут y може бути в термах довжини один або в термах довжини два. Для цього розглянемо мiсця x^2.

Нехай рiвняння має точно один x^2, а змiнна y є в термi довжини два. Тодi для випадку $A)$ iншi два пiдтерми довжини два мають вигляд xy, тому такi рiвняння:

$$x \cdot x^2 = xy \cdot xy, \quad x \cdot xy = x^2 \cdot xy, \quad x \cdot xy = xy \cdot x^2.$$

Перше рiвняння збiгається з рiвнянням (9), друге збiгається з (8), а третє комутуванням термiв правої частини парастрофно-первинно-рiвносильне рiвнянню (8). Для розташування дужок $B)$ випадок, коли є x^2 та y розташований у термi довжини два неможливий. Тому нехай y є у термi довжини один. Для випадку $A)$ рiвнянь з x^2 та змiнною y у термi довжини один не iснує. Для випадку $B)$ один iз пiдтермiв довжини два збiгається з x^2, а iнший однозначно з xy.

Якщо x^2 знаходиться злiва, то маємо такi три рiвняння:

$$x \cdot x^2 = x \cdot (y \cdot xy), \quad x \cdot x^2 = y \cdot (x \cdot xy), \quad y \cdot x^2 = x \cdot (x \cdot xy).$$

Перше рівняння зовнішнім діленням на терм x справа парастрофно-первинно-рівносильне рівнянню (15). Друге рівняння поділимо на x через y, отримаємо рівняння (9). Третє рівняння поділимо на x через y двічі справа, а потім зовні на терм x^2, в результаті отримаємо рівняння, яке парастрофно-первинно-рівносильне рівнянню (8).

Якщо x^2 знаходиться справа, то маємо:

$$y \cdot xy = x \cdot (x \cdot x^2), \quad x \cdot xy = y \cdot (x \cdot x^2), \quad x \cdot xy = x \cdot (y \cdot x^2).$$

Перше рівняння збігається з (15). Друге зовнішнім діленням на терм y, а потім внутрішнім діленням на x через y парастрофно-первинно-рівносильне рівнянню (9). Третє рівняння зовнішнім діленням на x справа, отримаємо рівняння $y \cdot x^2 = x \cdot (x \cdot xy)$, яке встановлено вище, що воно парастрофно-первинно-рівносильне рівнянню (8).

Припустимо, що рівняння типу $(5;2;0)$ має два квадрати, тобто підтерм x^2 має дві появи в рівнянні. З розташуванням дужок $A)$ таке рівняння одне і воно має вигляд (10). Для випадку $B)$ можливі такі рівняння

$$x \cdot x^2 = y \cdot (y \cdot x^2), \quad y \cdot x^2 = x \cdot (y \cdot x^2), \quad y \cdot x^2 = y \cdot (x \cdot x^2).$$

Перше рівняння зовнішнім ділення на y парастрофно-первинно-рівносильне рівнянню (13). Друге і третє рівняння збігаються з (14) і (13) відповідно.

Отже, всього рівнянь предметного типу $(5;2;0)$ є не більше 11.

Розглянемо рівняння предметного типу $(4;3;0)$. Всі рівняння класифікуємо з точністю до комутування підтермів. Оскільки функційні рівняння мають дві предметні змінні, то враховуючи лексикографічний порядок, предметну змінну, яка має чотири появи, позначимо через x, а змінну, яка має три появи — через y.

Спочатку опишемо рівняння типу $(4;3;0)$, які не мають квадратів. Для випадку $A)$ таке рівняння лише одне, а саме $x \cdot xy = xy \cdot xy$, яке збігається з (16). Для розташування дужок $B)$, враховуючи комутування, отримуємо три такі рівняння:

$$x \cdot xy = x \cdot (y \cdot xy), \quad x \cdot xy = y \cdot (x \cdot xy), \quad y \cdot xy = x \cdot (x \cdot xy).$$

Перше рівняння збігається з (17), а друге рівняння — з (18). Третє рівняння зовні поділимо на y, отримаємо рівняння, яке парастрофно-первинно-рівносильне рівнянню (17).

Розглянемо рівняння типу $(4;3;0)$, які мають квадрати.

Припустимо, що рівняння мають лише один квадрат. Нехай це буде підтерм y^2. Для розташування дужок $A)$ рівняння лише з одним квадратом неможливе, бо кількість появ двох предметних змінних перевищує кількість підтермів довжини два. А рівнянь для $B)$ з точністю до комутування можливих два: $x \cdot y^2 = x \cdot (x \cdot xy)$, $x \cdot xy = x \cdot (x \cdot y^2)$. Перше рівняння збігається з (19), а друге поділимо зовна на терм x, отримаємо рівняння парастрофно-первинно-рівносильне рівнянню (19). Якщо одним квадратом буде підтерм x^2, то для розташування дужок випадку $A)$ таких рівнянь з точністю до комутування два: $y \cdot x^2 = xy \cdot xy$, $y \cdot xy = x^2 \cdot xy$. Перше збігається з (20), а друге з (21). Для розташування дужок $B)$ маємо варіанти, коли підтерм x^2 в лівій частині рівняння, то такі рівняння:

$$y \cdot x^2 = x \cdot (x \cdot xy), \quad x \cdot xy = x \cdot (x \cdot y^2), \quad x \cdot xy = x \cdot (x \cdot y^2).$$

Кожне з цих рівнянь збігається з (22), (23), (24) відповідно. Коли підтерм x^2 в правій частині рівняння, то маємо такі рівняння:

$$x \cdot xy = y \cdot (y \cdot x^2), \quad y \cdot xy = x \cdot (y \cdot x^2), \quad y \cdot xy = y \cdot (x \cdot x^2),$$

кожне з яких поділимо на одиничний підтерм зовні справа, отримаємо рівняння, які парастрофно-первинно-рівносильні рівнянням (24), (23), (22) відповідно.

Припустимо, що рівняння мають лише два однакові квадрати. За кількістю появ предметних змінних, це можуть бути лише x^2. Для розташування дужок випадку $A)$ таких рівнянь не існує, оскільки буде третій квадрат, а саме y^2, що суперечить припущенню. Для розташування дужок $B)$ маємо, що всі підтерми довжини два будуть x^2, а це означає, що таке рівняння лише одне $y \cdot x^2 = y \cdot (y \cdot x^2)$, яке збігається з рівнянням (25).

Припустимо, що рівняння мають лише два різні квадрати x^2 та y^2. Рівнянь для розташування дужок $A)$, згідно з комутуванням підтермів, є три: $x \cdot x^2 = xy \cdot y^2$, $x \cdot y^2 = x^2 \cdot xy$, $x \cdot xy = x^2 \cdot y^2$, кожне з яких збігається з (26), (27), (28) відповідно. Для розташування дужок $B)$ маємо випадки, коли підтерм x^2 зліва, тоді можливі такі рівняння: $x \cdot x^2 = x \cdot (y \cdot y^2)$, $x \cdot x^2 = y \cdot (x \cdot y^2)$, $y \cdot x^2 = x \cdot (x \cdot y^2)$, кожне з яких збігається з (29), (30), (31) відповідно. Коли підтерм x^2 в правій частині рівняння, то маємо рівняння:

$$x \cdot y^2 = x \cdot (y \cdot x^2), \quad x \cdot y^2 = y \cdot (x \cdot x^2), \quad y \cdot y^2 = x \cdot (x \cdot x^2),$$

кожне з яких поділимо на одиничний підтерм зовні справа, отримаємо рівняння, які парастрофно-первинно-рівносильні рівнянням (31), (30), (29) відповідно.

Припустимо, що рівняння мають три квадрати, а саме з кількості появ кожної предметної змінної це — один квадрат змінної y та два кадрати змінної x. Для випадку $A)$ таких рівнянь два: $y \cdot y^2 = x^2 \cdot x^2$, $y \cdot x^2 = x^2 \cdot y^2$, кожне з яких збігається з (32) та (33) відповідно. Оскільки підтермів довжини два у рівняннях з розташуванням дужок $B)$ лише два, то рівнянь з трьома квадратами з випадком $B)$ не існує.

Цим самим доведено, що всього рівнянь предметного типу $(4;3;0)$ є не більше 18.

Отже, рівнянь довжини 5 від двох різних предметних змінних є не більше 29. □

Лема 6. *З точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує не більше як 16 чистих нетривіальних узагальнених бінарних квазігрупових функційних рівнянь функційної довжини* 5 *від трьох різних предметних змінних з квадратами, які мають предметний тип (3;2;2): це рівняння — (34)–(49).*

Доведення. Розглянемо рівняння, які мають три незалежних предметних змінних: x, y та z. Нехай змінна x має в рівнянні три своїх появи, а змінні y та z по дві появи кожна.

Припустимо, що рівняння мають три квадрати своїх незалежних змінних. Тоді в цьому випадку маємо рівняння лише з випадку $A)$, бо для випадку $B)$ кількість підтермів довжини два менша від кількості квадратів за припущенням. Згідно із зауваженням 1. та лемою 1. маємо такі рівняння:

$$x \cdot x^2 = y^2 \cdot z^2, \quad x \cdot y^2 = x^2 \cdot z^2, \quad x \cdot z^2 = x^2 \cdot y^2.$$

Перше рівняння збігається з (34), друге — з (35). А в третьому — взаємно перейменуємо відповідно предметні змінні y та z, отримаємо парастрофно-первинно-рівносильне рівняння до (35).

Припустимо, що рівняння мають два квадрати своїх незалежних змінних. Тут можливих два випадки: у першому випадку — обидві квадратичні змінні є квадратами; у другому — одна квадратична і одна неквадратична предметна змінна є квадратами.

Якщо квадратами є квадратичні змінні, то таке рівняння для розташування дужок $A)$ збігається з (34) або (35), а для випадку $B)$ з врахуванням леми 1., таке рівняння одне $x \cdot y^2 = x \cdot (x \cdot z^2)$, яке збігається з (36).

Якщо в рівнянні є x^2, то другим квадратом буде одна із квадратичних змінних. Нехай другим квадратом є z^2. Для випадку $A)$ з врахуванням леми 1. маємо такі рівняння:

$$y \cdot x^2 = xy \cdot z^2, \quad y \cdot z^2 = x^2 \cdot xy, \quad y \cdot xy = x^2 \cdot z^2.$$

Перше рівняння збігається з (37). Друге рівняння поділимо на x через y і комутуванням підтермів справа та заміна частин рівняння місцями, отримуємо рівняння, яке парастрофно-первинно-рівносильне (37). Третє рівняння збігається з (38). Для розташування дужок $B)$ розглянемо два випадки, коли x^2 зліва, тоді z^2 справа і навпаки. У першому випадку маємо рівняння:

$$x \cdot x^2 = y \cdot (y \cdot z^2), \quad y \cdot x^2 = x \cdot (y \cdot z^2), \quad y \cdot x^2 = y \cdot (x \cdot z^2).$$

Кожне з цих трьох рівнянь збігається зліва на право з (39), (40) та (41) відповідно. У другому випадку, коли x^2 справа, тоді z^2 зліва, тому маємо такі рівняння:

$$x \cdot z^2 = y \cdot (y \cdot x^2), \quad y \cdot z^2 = x \cdot (y \cdot x^2), \quad y \cdot z^2 = y \cdot (x \cdot x^2).$$

Кожне з цих рівнянь поділимо зовні на одиничний підтерм справа, отримаємо відповідно парастрофно-первинно-рівносильні рівняння до рівнянь (39), (40) та (41).

Припустимо, що рівняння мають один квадрат. Маємо два випадки:
1) квадрат неквадратичної змінної, тобто x^2;
2) квадрат квадратичної змінної, тобто згідно з лемою 1., це y^2.

Розглянемо випадок 1). Для розташування дужок $A)$ з врахуванням леми 1. нехай x^2 зліва, тоді маємо рівняння: $x \cdot x^2 = yz \cdot yz$, $y \cdot x^2 = xz \cdot yz$. Кожне з рівнянь збігається з (42) та (43) відповідно. Якщо x^2 справа для випадку $A)$, то

$$x \cdot yz = x^2 \cdot yz, \quad y \cdot yz = x^2 \cdot xz, \quad y \cdot xz = x^2 \cdot yz.$$

Перше і друге рівняння збігається відповідно з (44) та (45). А третє рівняння, поділимо на z через y та комутуванням перейдемо до рівняння, яке парастрофно-первинно-рівносильне (43).

Для випадку $B)$ нехай x^2 зліва, тоді з врахуванням леми 1. маємо єдине рівняння, якщо x зліва: $x \cdot x^2 = y \cdot (z \cdot yz)$, яке поділимо на z через y, отримаємо рівняння парастрофно-первинно-рівносильне до (42). Якщо x справа, то згідно з лемою 1. одиничним термом зліва буде y. Таких рівнянь п'ять: $y \cdot x^2 = x \cdot (z \cdot yz)$, $y \cdot x^2 = z \cdot (x \cdot yz)$, $y \cdot x^2 = z \cdot (z \cdot xy)$, $y \cdot x^2 = y \cdot (z \cdot xz)$, $y \cdot x^2 = z \cdot (y \cdot xz)$. Перше рівняння поділимо на z через y, отримаємо рівняння (44). Друге рівняння поділимо на y через z, отримаємо парастрофно-первинно рівносильне рівняння (43). Третє рівняння збігається з (46). Четверте рівняння поділимо на x через z, отримаємо (43). П'яте рівняння поділимо на x через y, взаємно перейменуємо предметні змінні y та z, отримаємо рівняння парастрофно-первинно-рівносильне (45).

Нехай x^2 справа для випадку $B)$. Якщо зліва одиничний терм x, то згідно з лемою 1. маємо такі рівняння $x \cdot yz = y \cdot (z \cdot x^2)$, $x \cdot yz = z \cdot (y \cdot x^2)$. Перше рівняння поділимо зовні на y, а потім на z через y і взаємно перейменуємо y та z і комутуванням термів, в результаті отримаємо парастрофно-первинно-рівносильне до рівняння (43). Друге рівняння комутуванням та взаємним перейменуванням квадратичних змінних зводимо до першого рівняння. Якщо зліва одиничний терм y та всі змінні різні, то маємо такі рівняння: $y \cdot xz = y \cdot (z \cdot x^2)$, $y \cdot xz = z \cdot (y \cdot x^2)$. Перше рівняння поділимо зовні на y, а потім на x через z, отримаємо (45). Друге рівняння поділимо зовні на z, а потім на x через z, отримаємо (43). Якщо зліва обидва y, то

$$y \cdot xy = z \cdot (z \cdot x^2), \quad y \cdot yz = x \cdot (z \cdot x^2), \quad y \cdot yz = z \cdot (x \cdot x^2).$$

Всі рівняння поділимо зовні на одиничний підтерм. У першому рівнянні взаємно перейменуємо квадратичні змінні, отримаємо (46). Друге і третє поділимо на y через z, отримаємо (44) і (42) відповідно.

Розглянемо випадок 2). Для розташування дужок $A)$ маємо два рівняння, які збігаються з (47) і (48). Для випадку $B)$ якщо квадрат зліва, то таких рівнянь три:

$$x \cdot y^2 = x \cdot (z \cdot xz), \quad x \cdot y^2 = z \cdot (x \cdot xz), \quad z \cdot y^2 = x \cdot (x \cdot xz).$$

Перше рівняння збігається з (49). Друге і третє рівняння поділимо на x через z, отримаємо (47) і (48) відповідно. Якщо квадрат справа, то:

$$x \cdot xz = x \cdot (z \cdot y^2), \quad x \cdot xz = z \cdot (x \cdot y^2), \quad z \cdot xz = x \cdot (x \cdot y^2).$$

Кожне з цих рівнянь поділимо на одиничний підтерм справа, отримаємо три попередніх рівняння, які парастрофно-первинно рівносильні одному з рівнянь (47)–(49).

Отже всього рівнянь з квадратами типу (3;2;2) не більше 16. □

Висновки

В статті знайдені узагальнені бінарні квазігупові функційні рівняння функційної довжини п'ять з точністю до парастрофно-первинної рівносильності за кількістю різних предметних змінних та за їх предметним типом.

Перспективою подальшого дослідження стане розв'язування отриманих рівнянь на множині бінарних квазігрупових операцій та встановлення попарної парастрофно-первинної нерівносильності між всіма функційними рівняннями функційної довжини 5.

Література

[1] Aczél J Lectures on Functional Equations and their applications. // New York: Acad. press. — 1966. — P. 510.

[2] Белоусов В.Д. Системы квазигрупп с обобщёнными тождествами. // УМН. — Т. 20. — 1965. — N 1(121). — С. 75–146.

[3] Чебан А.М. *Некоторые системы квазигрупп с обобщёнными тождествами* // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.06. — Кишинёв, 1971. —85 с.

[4] Коваль Р. Ф., Класифікація функційних рівнянь малої довжини на квазігрупових операціях// дисер. на здобуття наук. ступ. канд. фіз.-мат. наук, Вінниця, 2005.

[5] Крайнічук Г. В. Класифікація бінарних квазігрупових функційних рівнянь довжини чотири // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. — 2018. — № 1/2. — С. 4–23.

[6] Krapež A., Živković D., Parastrophically equivalent quasigroup equations // Publications de L'Institut Mathematique, Nouvelle serie. — 87(101). — 2010. — P. 39–58.

[7] Krapež A., Simić S. K., Tošić D. V., Parastrophically uncancellable quasigroup equations // Aequat. Mathem. — 79. — 2010. — P. 261–280.

[8] Movsisyan Yu.M., Hyperidentities and Related Concepts, I. Arm. J. Math. 2. — 2017. — P.144–222.

[9] Сохацький Ф.М. Класифікація функційних рівнянь на квазігрупах// Український математичний журнал. — Т. 56. — N4. — 2004. — С. 1259–1266.
[10] Sokhatsky F.M. Parastrophic symmetry in quasigroup theory // Visnyk DonNU, A: natural Sciences. — N. 1–2. — 2016. — P. 70–83.

Krainichuk (Shelepalo) H. V.

Ph.D. in Physics and Mathematics, Senior Lecturer of the Department of Radiophysics and Cybersecurity, Vasyl' Stus Donetsk National University

ON CLASSIFICATION OF GENERALIZED BINARY QUASIGROUP FUNCTIONAL EQUATIONS OF LENGTH FIVE

SUMMARY

This paper summarizes all pure non-trivial generalized binary quasigroup functional equations of functional length 5 to the study of no more than 52 such equations up to parastrophically primary equivalence. All of them are divided according to the number of independent individual variables and by the individual type. It is established that there exist at most two functional equations of the individual type (7;0;0); no more than 11 of the individual type (5;2;0); no more than 18 of the individual type (4;3;0) and no more than 21 equations of the individual type (3;2;2).

Key words: *quasigroup, invertible operation, parastrophe, functional equation, parastrophically primary equivalence.*

Крайничук (Шелепало) Г.В.

кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры радиофизики и кибербезопасности, Донецкий национальный университет имени Васыля Стуса

О КЛАССИФИКАЦИИ ОБОБЩЕННЫХ БИНАРНЫХ КВАЗИГРУППОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛИНЫ ПЯТЬ

РЕЗЮМЕ

В этой статье сведены все чистые нетривиальные обобщённые бинарные квазигрупповые функциональные уравнения функциональной длины 5 к изучению не более 52 таких уравнений с точностью к парастрофно-первичной эквивалентности. Все они разделены по количеству независимых предметных переменных и по предметному типу. Установлено, что функциональных уравнений предметного типа (7;0;0) существует не более двух уравнений; типа (5;2;0) не более 11; типа (4;3;0) не более 18 и предметного типа (3;2;2) не более 21 уравнения.

Ключевые слова: *квазигруппа, обратимая операция, парастроф, функциональное уравнение, парастрофно-первичная эквивалентность.*