УДК 512.64

Кучма М.І., Івасик Г.В.

[1] **кандидат фізико-математичних наук, доцент,**
[2] **кандидат фізико-математичних наук, доцент,**
Національний університет "Львівська політехніка"

СИМЕТРИЧНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ СИМЕТРИЧНИХ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЯМИ ПОЛІНОМІВ З ІНВОЛЮЦІЄЮ

Встановлено необхідні і достатні умови існування факторизації симетричних матриць, які симетрично еквівалентні до форм Сміта, над кільцями полінонів з інволюцією. Отримано критерій ∇ — конгруентності симетричних матричних двочленів.

Ключові слова: *симетрично еквівалентні матриці, ∇ — конгруентні матриці, факторизація матриці, форма Сміта.*

Вступ

Алгебричний підхід до вивчення факторизації і симетричної еквівалентності симетричних матриць над кільцями поліномів з інволюцією був започаткований у роботах [7], [8] та [10]. Розв'язання П.С. Казимірським [5] проблеми виділення із матричного полінома регулярного множника дало змогу знайти необхідні і достатні умови факторизації симетричних матриць над кільцями поліномів та квазіполіномів з інволюцією [1], [3] і [4]. Факторизації симетричних матриць тісно пов'язані із задачею про симетричну еквівалентность таких матриць. Зокрема, у праці [1] доведено, що із строгої еквівалентності регулярних симетричних матриць випливає їх конгруентність. У роботі [2] встановлено, що довільна матриця з кільця з інволюцією, форма Сміта якої симетрична, є односторонньо еквівалентна до симетричної, і доведено конгруентність прямих добутків строго еквівалентних поліномних матриць, а в [6] отримано умови симетричної еквівалентності та конгруентності симетричних матриць до їх форм Сміта над кільцем поліномів з інволюцією.

Основна мета даної роботи — знайти умови існування факторизації симетричних матриць над кільцями поліномів з інволюцією, які симетрично еквівалентні до їх форм Сміта.

Основна частина

Нехай у кільці поліномів $\mathrm{C}[x]$ визначена інволюція ∇ одним із можливих способів [7]:

$$(\alpha) \quad \Big(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\Big)^{\nabla} = \sum_{i=0}^{m} \bar{a}_i (-x)^i,$$

$$(\beta) \quad \Big(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\Big)^{\nabla} = \sum_{i=0}^{m} a_i (-x)^i,$$

$$(\gamma) \quad \Big(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\Big)^{\nabla} = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i.$$

У кільці матриць $M_n(\mathrm{C}[x])$ інволюцію ∇ введемо так:

$$A(x)^{\nabla} = \|a_{ij}(x)\|^{\nabla} = \|a_{ji}(x)^{\nabla}\|.$$

Поліномну матрицю $A(x)$ називають симетричною, якщо $A(x) = A(x)^{\nabla}$. Матриці $A(x)$ і $B(x)$ називають еквівалентними, якщо існують матриці $P(x)$, $Q(x) \in GL_n(\mathrm{C}\,[x])$ такі, що $P(x)A(x)Q(x) = B(x)$. Матриці $A(x)$ і $B(x)$ називають симетрично еквівалентними, якщо існує матриця $R(x) \in GL_n(\mathrm{C}[x])$ така, що $R(x)A(x)R(x)^{\nabla} = B(x)$. Якщо для матриць $A(x)$ і $B(x)$ існують P, $Q \in GL_n(\mathrm{C})$ такі, що $PA(x)Q = B(x)$, то матриці $A(x)$ і $B(x)$ називають строго еквівалентними [1]. Якщо ж матриць $A(x)$ і $B(x)$ існує $T \in GL_n(\mathrm{C})$ така, що $TA(x)T^{\nabla} = B(x)$, то $A(x)$ і $B(x)$ називають ∇ – конгруентними [6].

Факторизацією симетричної матриці $A(x)$ з кільця $M_n(\mathrm{C}[x])$ називають її зображення у вигляді

$$A(x) = B(x)C(x)B(x)^{\nabla}, \tag{1}$$

де $B(x)$ — регулярна (унітальна) поліномна матриця, а $C(x)$ — деяка неособлива симетрична матриця. Нагадаємо, що поліномну матрицю

$$A(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i x^i$$

називають регулярною (унітальною), якщо $\det A_m \neq 0$ ($A_m = E$ — одинична матриця) і сингулярною, якщо $\det A_m = 0$.

Позначимо через $S_A(x)$ форму Сміта поліномної матриці $A(x)$

$$S_A(x) = P(x)A(x)Q(x), \tag{2}$$

де матриці $P(x)$, $Q(x) \in GL_n(\mathrm{C}[x])$.

Припустимо, що форму Сміта матриці $A(x)$ можна зобразити у вигляді

$$S_A(x) = \Phi(x)I(x)\Phi(x)^{\nabla}, \tag{3}$$

де $\Phi(x)$, $I(x)$ — d- матриці [5].

Зазначимо, що розклад (1) симетричної матриці $A(x)$, в якому $B(x)$ — регулярна матриця із формою Сміта $\Phi(x)$, а матриця $C(x)$ має форму Сміта $I(x)$, називають допустимою факторизацією матриці $A(x)$, паралельною факторизації (3) її форми Сміта. Інакше кажучи, факторизація (1) допустима тоді, коли форма Сміта поліномної матриці дорівнює добутку форм Сміта її співмножників.

Теорема 1. *Нехай для симетричної поліномної матриці $A(x)$ існує факторизація*

$$A(x) = B(x)CB(x)^{\nabla} \tag{4}$$

паралельна факторизації її форми Сміта

$$S_A(x) = \Phi(x)I\Phi(x)^{\nabla}, \tag{5}$$

в якій матриця $B(x)$ лівоеквівалентна до форми Сміта $S_B(x) = \Phi(x)$, а $C = C^{\nabla}$ — неособлива числова діагональна матриця з формою Сміта I.

Тоді існує матриця $R(x) \in GL_n(\mathrm{C}[x])$ така, що

$$R(x)A(x)R(x)^{\nabla} = S_A(x). \tag{6}$$

Доведення. Нехай для матриці $A(x)$ існує факторизація (4) паралельна факторизації її форми Сміта (5), в якій матриця $B(x)$ лівоеквівалентна до форми Сміта $\Phi(x)$, тобто існує матриця $K(x) \in GL_n(\mathrm{C}[x])$ така, що $B(x) = K(x)\Phi(x)$. Тоді

$$A(x) = K(x)\Phi(x)C\Phi(x)^{\nabla}K(x)^{\nabla}. \tag{7}$$

Відомо [9], що симетрична (ермітова) матриця C конгруентна (ермітово конгруентна) до діагональної матриці $I(C)$ — матриці інерції для C, тому маємо $C = GI(C)G^{\nabla}$. Зважаючи, що $\Phi(x)G = G\Phi(x)$, тоді із співвідношення (7) отримаємо

$$A(x) = K(x)\Phi(x)GI(C)G^{\nabla}\Phi(x)^{\nabla}K(x)^{\nabla} =$$

$$= K(x)G\Phi(x)I(C)\Phi(x)^{\nabla}G^{\nabla}K(x)^{\nabla} = R(x)S_A(x)R(x)^{\nabla},$$

де матриця $R(x) = K(x)G$ оборотна над $\mathrm{C}[x]$.

Отже, матриця $A(x)$ симетрично еквівалентна до форми Сміта $S_A(x)$.

Теорему доведено. □

Теорема 2. *Нехай $\Phi(x)$ — d- матриця, $\deg\det\Phi(x) = nr$, яка є дільником форми Сміта $S_A(x)$ симетричної матриці $A(x)$. Для матриці $A(x)$ симетрично еквівалентної до форми Сміта $S_A(x)$ існує факторизація (1), в якій $B(x)$ — унітальна матриця степеня r з формою Сміта $\Phi(x)$, а $C(x) = C(x)^{\nabla}$ — неособлива матриця, тоді і тільки тоді, коли симетрична матриця*

$$V(\Phi)S_A(x)V(\Phi)^{\nabla}$$

одночасно ділиться зліва на $\Phi(x)$ і справа на $\Phi(x)^{\nabla}$ при деяких допустимих значеннях параметрів матриці $V(\Phi)$, для яких виконується умова

$$\det M_{V(\Phi)R(x)||E,Ex,\dots,Ex^{r-1}||}(\Phi) \not\equiv 0,$$

де $R(x)$ — довільна оборотна матриця із співвідношення (6), а матриця $V(\Phi)$ — ядро визначальної матриці $W(\Phi)$, введеної в [5].

Доведення. Доведення випливає з теореми 1 праці [4] і факту симетричної еквівалентності матриці $A(x)$ до форми Сміта $S_A(x)$.

□

Як наслідок, із теореми 2 випливають умови допустимої факторизації матриць, які симетрично еквівалентні до їх форм Сміта.

Теорема 3. *Нехай для форми Сміта $S_A(x)$ симетричної матриці $A(x)$ має місце факторизація (3). Для матриці $A(x)$ симетрично еквівалентної до форми Сміта $S_A(x)$ існує допустима факторизація (1), в якій $B(x)$ — сингулярна матриця з формою Сміта $\Phi(x)$, а $C(x)$ — неособлива матриця. Якщо ж матриця $R(x)^{-1}\Phi(x)$ регуляризується справа, то множник $B(x)$ є регулярним степеня r з формою Сміта $\Phi(x)$ у факторизації (1), де $R(x)$ — оборотна матриця із співвідношення (6).*

Доведення. Із співвідношень (3) і (6) маємо

$$A(x) = R(x)^{-1}S_A(x)[R(x)^{\nabla}]^{-1} = R(x)^{-1}\Phi(x)I(x)\Phi(x)^{\nabla}[R(x)^{\nabla}]^{-1}.$$

Позначивши через $B(x) = R(x)^{-1}\Phi(x)$, отримаємо факторизацію (1), в якій $B(x)$ сингулярна матриця з формою Сміта $\Phi(x)$.

Якщо ж матриця $R(x)^{-1}\Phi(x)$ регуляризується справа, то це означає, що існує матриця $Z(x) \in GL_n(\mathrm{C}[x])$ така, що $R(x)^{-1}\Phi(x)Z(x) = B(x)$ — регулярна матриця степеня r з формою Сміта $\Phi(x)$. Тому одержимо факторизацію (1), в якій $C(x) = Z(x)^{-1}I(x)[Z(x)^{\nabla}]^{-1}$.

Теорему доведено. □

Наступні результати стосуються симетричної еквівалентності та ∇ —конгруентності симетричних матриць.

Твердження 1. *Якщо еквівалентні симетричні матриці $A(x)$ і $B(x)$ є симетрично еквівалентними до їх форм Сміта $S_A(x)$ і $S_B(x)$ відповідно, то вони симетрично еквівалентні.*

Доведення. Для матричних поліномів $A(x)$ і $B(x)$ існують матриці

$$T(x), \quad R(x) \in GL_n(\mathrm{C}[x])$$

такі, що

$$S_A(x) = T(x)A(x)T(x)^{\nabla} \quad \text{і} \quad S_B(x) = R(x)B(x)R(x)^{\nabla}. \tag{8}$$

Зважаючи, що матриці $A(x)$ і $B(x)$ — еквівалентні, тобто $S_A(x) = S_B(x)$, то із співвідношення (8) отримаємо

$$B(x) = S(x)A(x)S(x)^{\nabla},$$

де матриця $S(x) = R(x)^{-1}T(x) \in GL_n(\mathrm{C}[x])$.

Твердження доведено. □

Твердження 2. *Якщо еквівалентні симетричні матриці $A(x)$ і $B(x)$ є ∇-конгруентними до їх форм Сміта $S_A(x)$ і $S_B(x)$ відповідно, то вони ∇-конгруентні.*

Доведення. Доведення твердження 2 повністю повторює доведення твердження 1. □

Теорема 4. *Симетричні матричні двочлени*

$$A(x) = Ex^m - A \quad \text{і} \quad B(x) = Ex^m - B,$$

де матриці A, $B \in M_n(\mathrm{C})$, m — парне число, є ∇ — конгруентними, тоді і тільки тоді, коли матриці A і B подібні.

Доведення. Необхідність. Нехай симетричні матричні двочлени

$$A(x) = Ex^m - A \quad \text{і} \quad B(x) = Ex^m - B$$

є ∇ — конгруентними, тобто існує матриця $R \in GL_n(\mathrm{C})$ така, що

$$R(Ex^m - A)R^{\nabla} = Ex^m - B. \tag{9}$$

Прирівнюючи матричні коефіцієнти при однакових степенях x у рівності (9), отримаємо $RAR^{\nabla} = B$ і $RR^{\nabla} = E$, де E — одинична матриця. З останньої рівності одержимо, що матриця R унітарна за інволюції (α) і R ортогональна за інволюцій (β) і (γ). Це і доводить подібність матриць A і B.

Достатність. Припустимо, що $A(x) = Ex^m - A$ і $B(x) = Ex^m - B$ — симетричні матричні двочлени, в яких симетричні матриці A і B — подібні. Тоді існують матриці U, $V \in GL_n(\mathrm{C})$ (унітарні за інволюції (α) або ортогональні за інволюцій (β) і (γ)) такі, що $A = UDU^{\nabla}$, $B = VDV^{\nabla}$, де $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, а λ_i, $i = \overline{1,n}$ — власні значення матриць A і B. Враховуючи останні співвідношення, отримаємо

$$A(x) = Ex^m - A = U(Ex^m - D)U^{\nabla} = UV^{-1}(Ex^m - B)[V^{\nabla}]^{-1}U^{\nabla} = RB(x)R^{\nabla},$$

де матриця $R = UV^{-1} \in GL_n(\mathrm{C})$.

Отже, матричні двочлени $A(x) = Ex^m - A$ і $B(x) = Ex^m - B$ є ∇ — конгруентними.

Теорему доведено. □

Висновки

У роботі показано, що для симетричних лівоеквівалентних матриць своїм формам Сміта завжди існує допустима факторизація. Також знайдено необхідні й достатні умови симетричної еквівалентності до форми Сміта у разі існування недопустимих факторизацій. Отримано результати, що стосуються симетричної еквівалентності та ∇ —конгруентності симетричних матриць над кільцями поліномів з інволюцією. Для симетричних матричних двочленів отримано критерій їх ∇ — конгруентності.

Література

[1] *Зеліско В. Р.* Припустима факторизація і еквівалентність симетричних матриць над кільцем многочленів з інволюцією // Алгебра і топологія. Тематичний збірник наукових праць. - К.: ІСДО України, - 1993. - С. 53-62.

[2] *Зеліско В. Р.* Симетричні матриці і їх прямі добутки над кільцями з інволюціями // Прикл. проблеми мех. і мат. - 2005. - Вип. 3 - С. 7-12.

[3] *Зеліско В. Р., Кучма М. І.* Симетричні матриці та матричні рівняння над кільцем квазімногочленів з інволюцією// Прикл. проблеми мех. і мат. - 2013. Вип. 11. - С.45-51.

[4] *Зеліско В. Р., Кучма М. І.* Факторизація симетричних матриць над кільцями многочленів з інволюцією // Мат. методи і фіз.- мех. поля - 1997. - 40, № 4 - С. 91-95.

[5] *Казимірськиий П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. - К.: Наукова думка, - 1981. - 224 С.

[6] *Кучма М. І.* Симетрична еквівалентність матричних многочленів і виділення спільного унітального дільника із матричних многочленів // Укр. мат. журн. - 2001. - 53. № 2. - С. 211-219.

[7] *Любачевский Б. Д.* Одно представление симметрической многочленной матрицы // Вестн. Ленингр. ун-та. - 1972. - 13, № 2 - С. 41-45.

[8] *Любачевский Б. Д.* Факторизация симметрических матриц с элементами из кольца с инволюцией // Сибирский мат. журн. - 1973. - 14, № 2 - С. 337-356.

[9] *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. - М.: Мир, - 1989. - 656 С.

[10] *Якубович В. А.* Факторизация симметричных матричных многочленов // Докл. АН СССР. - 1970. - 194, № 3 - С. 532-535.

Kuchma M. I., Ivasyk H. V.

[1] *PhD of Physics and Mathematics, Associate Professor,*
[2] *PhD of Physics and Mathematics, Associate Professor,*
Lviv Polytechnic National University

SYMMETRIC EQUIVALENCE OF SYMMETRIC MATRICES OVER POLYNOMIAL RINGS WITH INVOLUTION

SUMMARY
We establish necessary and sufficient conditions for the existence of factorization of symmetric matrices that symmetric equaivalent to the Smith forms over ring of polynomials with involution. The criterion of ∇ – congruence symmetric matrix binomials is obtained.

Key words: *symmetric equaivalent matrices, ∇ — congruent matrices, factorization of matrix, Smith form.*

Кучма М.И., Ивасик Г.В.

[1] *кандидат физико-математических наук, доцент,*
[2] *кандидат физико-математических наук, доцент,*
Национальный университет "Львовская политехника"

СИММЕТРИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СИММЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ НАД КОЛЬЦАМИ ПОЛИНОМОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

РЕЗЮМЕ
Установлены необходимые и достаточные условия существования факторизации симметрических матриц, которые симметрически эквивалентные к формам Смита, над кольцом полиномов с инволюцией. Установлен критерий ∇ — конгруэнтности симметрических матричных двучленов.

Ключевые слова: *симметрически эквивалентные матрицы, ∇ — конгруэнтные матрицы, факторизация матрицы, форма Смита.*