УДК 512.544

Лукашова Т.Д.

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики, СумДПУ імені А.С. Макаренка

ПРО СКІНЧЕННІ p-ГРУПИ З НЕДЕДЕКІНДОВОЮ НОРМОЮ АБЕЛЕВИХ НЕЦИКЛІЧНИХ ПІДГРУП

У статті розглядаються скінченні p-групи, в яких норма абелевих нециклічних підгруп недедекіндова. Встановлено ряд загальних властивостей таких груп. Доведено, що скінченна p-група, в якій норма абелевих нециклічних підгруп недедекіндова і не містить абелевих нециклічних підгруп, також не містить таких підгруп.

Ключові слова: *p-група, недедекіндова підгрупа, центр групи, узагальнені норми групи, норма абелевих нециклічних підгруп групи*

Вступ

Одним з основних напрямів у теорії груп є вивчення впливу систем підгруп на структуру групи. В одних випадках група може мати систему підгруп з певними властивостями, але вплив цієї системи підгруп є не суттєвим. В інших випадках наявність єдиної (як правило, характеристичної) підгрупи з певною властивістю може бути визначальним фактором для будови усієї групи. Список таких підгруп можна суттєво розширити, розглядаючи різноманітні Σ-норми групи. Нагадаємо, що Σ-нормою називається перетин нормалізаторів усіх підгруп системи Σ (за умови, що система Σ непорожня). Зрозуміло, що коли Σ-норма збігається з групою, то в останній нормальні всі підгрупи системи Σ.

Уперше ситуацію, коли Σ-норма є власною підгрупою групи, почав вивчати Р.Бер [1] у 1935 році для системи Σ всіх підгруп даної групи. Відповідну Σ-норму було названо нормою групи G та позначено $N(G)$. Відповідно до [1] нормою $N(G)$ групи G називають перетин нормалізаторів усіх підгруп групи G. У останні роки інтерес до вивчення норми групи не зменшується, що підтверджує ряд робіт [2–5].

Звужуючи систему підгруп Σ, можна отримувати ті чи інші Σ-норми, що є узагальненнями норми $N(G)$. Зрозуміло, що усі Σ-норми містять центр групи і є її характеристичними підгрупами. Якщо у якості системи Σ виступає система всіх абелевих нециклічних підгруп, то у відповідності з [6] таку Σ-норму називатимемо нормою абелевих нециклічних підгруп і позначатимемо N_G^A.

У статті автор продовжує дослідження локально скінченних p-груп, що мають недедекіндову норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп. Зокрема, у роботах [6–7] було описано нескінченні локально скінченні p-групи, а у роботах [8–9] – скінченні p-групи із заданими обмеженнями на норму N_G^A.

Метою даної статті є дослідження властивостей скінченних p-груп, в яких норма абелевих нециклічних підгруп недедекіндова.

Основні означення та зауваження

Нормою абелевих нециклічних підгруп групи G називається перетин нормалізаторів N_G^A усіх абелевих нециклічних підгруп групи G за умови, що система таких підгруп у групі непорожня [6].

Зрозуміло, що в групі G, яка містить хоча б одну абелеву нециклічну підгрупу і збігається з нормою N_G^A, усі абелеві нециклічні підгрупи нормальні. Неабелеві групи з такою властивістю детально вивчалися у роботі [10] та були названі $\overline{HA}$-групами ($\overline{HA}_p$-групами, якщо вони є p-групами).

Будову скінченних $\overline{HA}_p$-груп описує наступне твердження.

Твердження 1. *([10]) Будь-яка скінченна $\overline{HA}_p$-група (p – просте число) є групою одного з наступних типів:*

1) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle c\rangle$, *де* $|a| = p^n$, $|b| = |c| = p$, $[a,b] = [a,c] = 1$, $[b,c] = a^{p^{n-1}}$;
2) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, *де* $|a| = p^n$, $|b| = p^m$, $n \geqslant 2$, $m \geqslant 1$, $[a,b] = a^{p^{n-1}}$;
3) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle d\rangle$, *де* $|a| = |d| = 9$, $|b| = 3$, $[a,b] = 1$, $[a,d] = b$, $[b,d] = d^3 = a^{-3}$;
4) $G = (H \times \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle c\rangle$, *де* $H = \langle h_1,h_2\rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2$, $|b| = |c| = 2$, $[h_1,h_2] = h_1^2$, $[H,\langle b\rangle] = [H,\langle c\rangle] = E$, $[b,c] = h_1^2$;
5) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle c\rangle$, *де* $|a| = |b| = |c| = 4$, $c^2 = a^2b^2$, $[c,b] = c^2$, $[c,a] = a^2$;
6) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle c\rangle\langle d\rangle$, *де* $|a| = |b| = |c| = |d| = 4$, $c^2 = d^2 = a^2b^2$, $[a,c] = [d,c] = a^2$, $[b,d] = b^2$, $[c,b] = [d,a] = c^2$;
7) $G = H \times \langle c\rangle$, *де* $H = \langle h_1,h_2\rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2$, $[h_1,h_2] = h_1^2$, $|c| = 2^n$, $n \geqslant 2$;
8) $G = H \times Q$, *де* H *і* Q *– групи кватерніонів;*
9) $G = (H \times \langle b\rangle)\langle c\rangle$, *де* $H = \langle h_1,h_2\rangle$, $|h_1| = |h_2| = |b| = |c| = 4$, $[h_1,h_2] = h_1^2 = h_2^2$, $[H,\langle c\rangle] = E$, $c^2 = b^2h_1^2$, $[b,c] = b^2$;
10) $G = (\langle h_2\rangle \times \langle c\rangle)\langle h_1\rangle$, *де* $|h_1| = |h_2| = 4$, $[h_1,h_2] = h_1^2 = h_2^2$, $|c| = 2^n > 2$, $[c,h_1] = c^{2^{n-1}}$;
11) $G = (H \times \langle a\rangle)\langle b\rangle$, *де* $H = \langle h_1,h_2\rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $|a| = 2$, $|b| = 8$, $[a,b] = [h_1,h_2] = h_1^2 = h_2^2$, $b^2 = h_1$, $[h_2,b] = a$;
12) $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, *де* $|a| = 2^n > 2$, $|b| = 8$, $b^4 = a^{2^{n-1}}$, $b^{-1}ab = a^{-1}$.

Основна частина

Текст основної частини — власне виклад матеріалу дослідження. У цьому пункті будуть розглядатися властивості скінченних p-груп, в яких норма абелевих нециклічних підгруп недедекіндова. Як було зазначено вище, у цьому випадку норма N_G^A є або $\overline{HA}_p$-групою, або недедекіндовою групою, в якій система абелевих нециклічних підгруп порожня. Наступна теорема стверджує, що у класі скінченних p-груп останній випадок місця не має.

Теорема 1. *Якщо норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп скінченної p-групи G (p – довільне просте число) недедекіндова і не містить абелевих нециклічних підгруп, то таких підгруп не містить і сама група G.*

Доведення. Нехай норма N_G^A недедекіндова і не містить абелевих нециклічних підгруп. Тоді вона є кватерніонною 2-групою порядку більше 8

$$N_G^A = \langle a\rangle\langle b\rangle,$$

де $|a| = 2^n, n \geqslant 3, |b| = 4, a^{2^{n-1}} = b^2, b^{-1}ab = a^{-1}$.

Покажемо, що $a_1 = a^{2^{n-1}}$ – єдина інволюція групи G. Припустимо супротивне. Нехай існує елемент $x \in G \backslash N_G^A, |x| = 2$. Оскільки $a_1 \in Z(G)$, то підгрупа $\langle a_1, x\rangle$ – абелева нециклічна і тому N_G^A-допустима. Тоді

$$[\langle x\rangle, N_G^A] \subseteq \langle x, a_1\rangle \cap N_G^A = \langle a_1\rangle.$$

Позначимо y – елемент порядку 4 з норми N_G^A такий, що $\langle y\rangle \ntriangleleft N_G^A$. Якщо $[y,x]=1$, то пiдгрупа $\langle x\rangle\times\langle y\rangle$ є N_G^A-допустимою i

$$[\langle y\rangle, N_G^A] \subseteq (\langle x\rangle\times\langle y\rangle)\cap N_G^A = \langle y\rangle.$$

Тодi $\langle y\rangle \triangleleft N_G^A$, що суперечить вибору елемента y. Отже, $[y,x]\neq 1$ i $[y,x]=a_1=y^2$. Зрозумiло, що у цьому випадку $x^{-1}bx=b^{-1}, |xb|=2$ i $x^{-1}abx=(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$. З iншого боку,

$$x^{-1}abx=(x^{-1}ax)(x^{-1}bx)=x^{-1}axb^{-1}=b^{-1}a^{-1}.$$

Тому $x^{-1}ax=b^{-1}a^{-1}b=a$ i $[x,a]=1$.

Оскiльки пiдгрупа $\langle a_1, xb\rangle=\langle a_1\rangle\times\langle xb\rangle$ – абелева нециклiчна, то вона N_G^A-допустима. Проте,

$$[a,xb]=[a,b]=\langle a^2\rangle \nsubseteq \langle a_1, xb\rangle.$$

Протирiччя. Отже, G мiстить одну iнволюцiю i тому не мiстить абелевих нециклiчних пiдгруп. □

З теореми 1 та означення норми абелевих нециклiчних пiдгруп випливає, що дослiдження скiнченних p-груп з недедекiндовою нормою N_G^A зводиться до дослiдження p-груп, в яких норма N_G^A є негамiльтоновою $\overline{HA_p}$-групою. Загальнi властивостi таких груп характеризують наступнi твердження.

Лема 1. *Якщо норма N_G^A абелевих нециклiчних пiдгруп групи G недедекiндова, то кожна абелева нециклiчна пiдгрупа групи має з нормою N_G^A неодиничний перетин.*

Доведення леми випливає з означення норми абелевих нециклiчних пiдгруп групи.

Лема 2. *Скiнченна p-група G (p – довiльне просте число), що має недедекiндову норму N_G^A абелевих нециклiчних пiдгруп, не мiстить елементарних абелевих пiдгруп порядку p^3.*

Доведення. Припустимо, що всупереч твердженню леми, група G мiстить елементарну абелеву пiдгрупу A порядку p^3. Оскiльки за твердженням 1 норма N_G^A не мiстить елементарних абелевих пiдгруп порядку p^3, то $A\nsubseteq N_G^A$.

Якщо $|A\cap N_G^A|\leqslant p$, то A мiстить абелеву нециклiчну пiдгрупу порядку p^2, яка має з нормою N_G^A одиничний перетин, що суперечить лемi 1. Отже, $|A\cap N_G^A|=p^2$.

Нехай $A=A_1\times\langle b\rangle$, де $A_1=\langle a_1\rangle\times\langle a_2\rangle, \langle b\rangle\cap N_G=E$. Оскiльки пiдгрупи $\langle a_i\rangle\times\langle b\rangle, i=1,2$ нециклiчнi, то вони нормальнi у пiдгрупi $G_1=\langle b\rangle N_G$. Тому

$$\langle b\rangle = (\langle a_1\rangle\times\langle b\rangle)\cap(\langle a_2\rangle\times\langle b\rangle)\triangleleft G_1.$$

Але у такому випадку $G_1=\langle b\rangle\times N_G,\ b\in Z(G_1)\leqslant N_{G_1}$ i G_1 є $\overline{HA_p}$-групою, що мiстить елементарну абелеву пiдгрупу порядку p^3. Протирiччя. □

Нагадаємо, що *нижнiм шаром* p-групи G називається пiдгрупа $\omega(G)$, породжена всiма елементами порядку p даної групи.

Лема 3. *Якщо скiнченна p-група (p – довiльне просте число) G має недедекiндову норму N_G^A абелевих нециклiчних пiдгруп i нижнiй шар $\omega(N_G^A)$ норми нециклiчний та мiститься у центрi $Z(G)$ групи, то $\omega(G)=\omega(N_G^A)$.*

Доведення. Нехай група G та її норма N_G^A задовольняють умови леми. Оскільки $\omega(N_G^A)$ нециклічний і міститься у центрі групи, то виходячи опису $\overline{HA}_p$-груп, до яких відноситься норма N_G^A, маємо $|\omega(N_G^A)| = p^2$.

Припустимо, що існує елемент x простого порядку такий, що $x \notin \omega(N_G^A)$. Тоді $\omega(N_G^A) \times \langle x \rangle$ є елементарною абелевою підгрупою порядку p^3, що неможливо за лемою 2. Отже, $\omega(G) = \omega(N_G^A)$. □

Лема 4. *Якщо скінченна p-група G (p – довільне просте число) має недедекіндову норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп та містить нормальну циклічну підгрупу $\langle g \rangle$ порядку p^2, то $g \in N_G^A$.*

Доведення. Нехай A – довільна абелева нециклічна підгрупа групи G. Оскільки $g^p \in Z(G)$ і за лемою 2 група G не містить елементарних абелевих підгруп порядку p^3, то $g^p \in A$. З цього випливає, що для довільного елемента $x \in A$ має місце включення $[g,x] \in \langle g^p \rangle \subset A$. Отже, A – g-допустима підгрупа і $g \in N_G^A$. □

Наслідок 1. *Якщо скінченна 2-група G має недедекіндову норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп та містить нормальну узагальнену групу кватерніонів*

$$H = \langle h_1, h_2 \rangle, |h_1| = 2^n,\ n \geqslant 3, |h_2| = 4, h_1^{2^{n-1}} = h_2^2, h_2^{-1} h_1 h_2 = h_1^{-1},$$

то $h_1^{2^{n-2}} \in N_G^A$.

Лема 5. *Нехай G – скінченна p-група (p – довільне просте число), в якій норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп недедекіндова. Якщо центр $Z(N_G^A)$ норми N_G^A циклічний, то елемент $a \in Z(N_G)$, $|a| = p$ міститься у кожній циклічній підгрупі складеного порядку групи G.*

Доведення. Нехай a – елемент простого порядку з центру $Z(N_G^A)$ норми N_G. Візьмемо елемент $x \in G$, $|x| = p^k > p$ і припустимо, що $\langle x \rangle \cap \langle a \rangle = E$. Тоді $[x,a] = 1$ і $\langle x, a \rangle \lhd G_1 = \langle x \rangle N_G^A$. Оскільки $\langle x^p \rangle \lhd G_1$, $\left\langle x^{p^{k-1}} \right\rangle \lhd G_1$, то $x^{p^{k-1}} \in Z(G_1)$.

Якщо $x^{p^{k-1}} \notin N_G^A$, то для довільного елемента $y \in N_G^A$ маємо $\langle y \rangle \times \left\langle x^{p^{k-1}} \right\rangle \lhd G_1$. Тому

$$(\langle y \rangle \times \left\langle x^{p^{k-1}} \right\rangle) \cap N_G^A = \langle y \rangle \lhd N_G^A$$

і норма N_G^A дедекіндова, що неможливо. Отже, $x^{p^{k-1}} \in N_G^A$. Оскільки $x^{p^{k-1}} \in Z(N_G^A)$, то $Z(N_G^A)$ нециклічний, що суперечить умові. Отже, $\langle x \rangle \cap \langle a \rangle \neq E$ і $a \in \langle x \rangle$.

Лему доведено. □

Наслідок 2. *Нехай G – скінченна p-група (p – довільне просте число), в якій норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп недедекіндова. Якщо центр $Z(N_G^A)$ норми N_G^A циклічний, то група G не містить абелевих підгруп типу (p^2, p^2).*

Доведення. Нехай група G та її норма N_G^A задовольняють умови наслідку. Оскільки центр $Z(N_G^A)$ локально циклічний, то за лемою 5 центральний елемент порядку p міститься у кожній циклічній підгрупі складеного порядку групи G, а значить, G не містить абелевих підгруп типу (p^2, p^2). □

Висновки

У цій статті ми продовжуємо досліджувати вплив обмежень, яким задовольняє норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп групи, на властивості самої групи. У якості таких обмежень обирається недедекіндовість норми N_G^A та розглядаються загальні властивості скінченних p-груп, в яких вказана норма недедекіндова.

Як показали наші попередні дослідження, вибір такого обмеження на норму абелевих нециклічних підгруп у багатьох випадках дозволяє досить точно охарактеризувати саму групу. Зокрема, було досліджено досить широкі класи локально скінченних p-груп, в яких норма N_G^A недедекіндова (нескінченні локально скінченні p-групи та скінченні p-групи, центр яких нециклічний).

Значно складнішим виявилося питання про повну характеризацію скінченних p-груп, які мають недедекіндову норму абелевих нециклічних підгруп та циклічний центр. Остаточна відповідь на нього ще й досі залишається відкритою.

Література

[1] Baer R. Der Kern, eine Charakteristische Untergruppe // Comp. Math. — 1935. — 1.— S. 254–283.

[2] Beidleman J.C., Heineken H., Newell M. Centre and norm // Bull. Austral. Math. Soc. — 2004. — 69. — P. 457–464.

[3] Gavioli N., Legarreta L., Sica C., Tota M. On the number of conjugacy classes of normalisers in a finite p-groups // Bull. Aust. Math. Soc. — 2005. — 73. — P. 219–230.

[4] Russo F. A note on the Quasicentre of a Group // International Journal of Algebra. — 2008. — 2, №7. — P. 301–313.

[5] Guo X., Wang J. On generalized Dedekind groups // Acta Mathematica Hungerica. — 2009. — 122, №1-2. — P. 37–44.

[6] Лукашова Т.Д. Про норму абелевих нециклічних підгруп нескінченних локально скінченних р-груп //Вісник Київського університету, серія фіз.-мат. науки. — 2004. — №3.— С. 35–39.

[7] Лиман Ф.М., Лукашова Т.Д. Про нескінченні 2-групи з недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп // Вісник Київського університету, серія "Фіз.-мат. науки". — 2005. — №1. — С. 56–64.

[8] Друшляк М.Г. Конечные p-группы ($p \neq 2$) с неабелевой нормой абелевых нециклических подгрупп // Известия Гомельского университета имени Ф.Скорины. — 2010. — №1(58). — С. 192–197.

[9] Lyman F., Lukashova T., Drushlyak M. On Finite 2-groups with non-Dedekind Norm of Abelian non-Cyclic Subgroups // Matematichni Studii. — 2016. — Vol.26, No.1. — C. 20–28.

[10] Лиман Ф. Н. p-групи, всі абелеві нециклічні підгрупи яких інваріантні //Доклады АН УРСР. — 1968. — № 8. — Р. 696–699.

Lukashova T. D.

PhD of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Mathematics,
A. S. Makarenko Sumy State Pedagogical University

ON FINITE p-GROUPS WITH NON-DEDEKIND NORM OF ABELIAN NON-CYCLIC SUBGROUPS

SUMMARY

In this paper the finite p-groups, in which the norm of Abelian non-cyclic subgroups is Non-Dedekind one, are considered. There were defined the series of general properties of such groups. It was proved that the finite p-group, in which the norm of Abelian non-cyclic subgroups is non-Dedekind and doesn't contain the Abelian non-cyclic subgroups, also doesn't contain such subgroups.

Key words: *p-group, non-Dedekind subgroup, center of the group, generalized norms of the group, the norm of Abelian non-cyclic subgroups of the group*

Лукашова Т. Д.

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики,
СумДПУ имени А.С. Макаренко

О КОНЕЧНЫХ p-ГРУППАХ С НЕДЕДЕКИНДОВОЙ НОРМОЙ АБЕЛЕВЫХ НЕЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДГРУПП

РЕЗЮМЕ

В статье рассматриваются конечные p-группы, в которых норма абелевых нециклических погрупп недедекиндова. Установлен ряд свойств таких групп. Доказано, что конечная p-группа, в которой норма абелевых нециклических подгрупп недедекиндова и не содержит абелевых нециклических подгрупп, также не содержит таких подгрупп.

Ключевые слова: *p-группа, недедекиндова подгруппа, центр группы, обобщенные нормы группы, норма абелевых нециклических подгрупп группы*