УДК 517.57

Трофименко О. Д., Левчук А. В.

доцент кафедри математичного аналізу і диференціальних рівнянь ДонНУ ім. Василя Стуса, студент кафедри математичного аналізу і диференціальних рівнянь, ДонНУ ім. Василя Стуса

ТЕОРЕМА БЛЯШКЕ-ПРИВАЛОВА ДЛЯ ПОЛІГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ

У роботі проаналізовано питання полігармонічності у n-вимірному просторі та отримано узагальнену теорему Бляшке-Привалова для полігармонічних функцій. Особливу увагу приділено поняттю супергармонічності функції, порядку поліномів та відповідним формулам із середнім значенням.

Ключові слова: *полігармонічність, супергармонічна та субгармонічна функція, теорема Бляшке-Привалова.*

Вступ

Класична теорема Гауса, що характеризує клас гармонічних функцій за допомогою формули середнього значення, отримала подальший розвиток і уточнення у багатьох роботах (див., наприклад, огляди [11], [22] і монографії [20], [21] з великою бібліографією). Оцінка поведінки неперервної функції всередині області за відомими значеннями на межі зустрічається в багатьох задачах комплексного аналізу, теорії відображень та топології. Одним з основних напрямків в цих дослідженнях є опис класів функцій, що задовольняють заданим інтегральним рівнянням, що мають певний геометричний сенс. Серед отриманих результатів також можна відмітити теореми про середнє, що характеризують гармонічні многочлени [15], біаналітичні функції [16], розв'язки рівнянь згортки з фінітним згортувачем та інші (див. роботу [18]). Окрім самостійного інтересу, результати такого типу важливі в інтегральній геометрії та різних застосуваннях (див. монографію [20]).

У даній статті розглянуто узагальнену теорему Бляшке-Привалова про характеризацію полігармонічних функцій.

Відомо, що функція функція f називається полігармонічною порядку m (або m-гармонічною) в області $G \subset \mathbb{R}^n$, якщо вона належить класу $C^{2m}(G)$ і задовольняєв G рівнянню

$$\Delta^m f = 0.$$

При $m = 1$ та $m = 2$ можна отримати відповідно гармонічну та бігармонічну функції.

Гармонічні многочлени характеризуються за допомогою теореми про середнє значенння, наприклад, у роботі Т. Рамсея та Ю. Вейта 1984 р. (див. [15]), де розглядається інтеграл з нерівномірною мірою. Аналог класичної теореми Гауса, що характеризує клас гармонічних функцій, вивчався також у роботах К. Івасакі (див. роботи [9]–[10]). Автор розглядає теорему про середнє у випадку багатогранників. А саме: вводиться n-вимірний багатогранник P, $k = 0, 1, ..., n$, $P(k)$ – k-вимірний каркас P. Формула із середнім значенням для полігармонічних функцій для сферичних середніх при вимірності $d = 2, 3$ була введена вже у 1909 році П. Пізетті (див. роботу [14]). В монографії В. В. Волчкова (див. джерело [20]) були отримано деякі теореми про середнє для диференціальних рівнянь, що мають наступний вигляд

$$p(\partial) f = 0,$$

де p – нетривіальний однорідний гармонічний поліном порядку k.

М. Брело (див. [1]) характеризує за допомогою теореми Бляшке-Привалова супергармонічні функції.

В представленій роботі безпосередньо побудовано та проаналізовано нові умови для функції та параметру Лапласа для дослідження властивості полігармонічності.

Допоміжні поняття та результати

Означення 1. *Неперервна функція $u(M)$, що задана в точках $M(x_1, ...x_k)$ довільної k – розмірної області G евклідового простору, називається субгармонічною, якщо, якою б не була куля B з центром у точки M_0, яка належить разом зі своєю границею області G, виконується нерівність*

$$u(M_0) \leqslant \frac{1}{\sigma(\gamma(B))} \int\limits_{\gamma(B)} u(M) d\sigma.$$

Означення 2. *Неперервна функція $u(M)$, що задана в точках $M(x_1, ...x_k)$ довільної k – розмірної області G евклідового простору, називається супергармонічною, якщо, якою б не була куля B з центром у точки M_0, яка належить разом зі своєю границею області G, виконується нерівність*

$$\frac{1}{\sigma(\gamma(B))} \int\limits_{\gamma(B)} u(M) d\sigma \leqslant u(M_0) \leqslant \frac{1}{\sigma(\gamma(B))} \int\limits_{\gamma(B)} u(M) d\sigma.$$

Означення 3. *[1] Числова функція (скінчена або ні) $u > -\infty$, визначена на відкритій множині ω простору R^n, називається супергармонічною у широкому сенсі (або гіпергармонічною), якщо вона напівнеперервна знизу та якщо для кожного замкненого шару $\bar{B}(x_0, r) \subset \omega$ виконується нерівність $u(x_0) \geqslant M_u^r(x_0)$, де $M_u^r(x_0)$-середне значення функції $u(x)$ за площею сфери $S(x_0, r)$.*

Зокрема, функція $u = +\infty$ є супергармонічною у широкому сенсі.

Розглянемо приклади супергармонічних та субгармонічних функцій. Яка б не була гармонічна функція f (можливо, комплексна) на відкритій множині ω простору R^n, аблосютна величина $|f|$ є субгармонічною функцією. Насправді, $|f|$ є неперервна функція та для будь-якого замкненого шару $\bar{B}(x_0, r) \subset \varphi$ маємо $f(x_0) = M_f^r(x_0)$, отже $|f(x_0)| \leqslant M_{|}f|^r(x_0)$. Так само, субгармонічною є функція $f^+ = \sup(f, 0)$, бо f та 0 – функції субгармонічні.

Якщо f та g – дві гармонічні функції на відкритій множині $\omega \subset R^n$, то $|f + ig|$ є субгармонічною функцією. Звідси випиває, що на площині модуль голоморфної функції є субгармонічна функція.

Нехай $f(z)$ – функція однієї комплексної змінної, що є визначеною та голоморфною в деякій області та не перетворюється тотожно в нуль. Тоді $\log|f(z)|$ є субгармонічною функцією. $\log|f(z)| < +\infty$, ця функція неперервна скрізь, є гармонічною поза (ізольованих) нулів функції f та приймає значення $-\infty$ в нулях f. Отже, вона задовольняє локальному критерію субгармонічності у кожній точці.

Зокрема, $h(||x - x_0||) = -\log||x - x_0||$ – супергармонічна функція в R^2. Так само легко переконатися у тому, що $h(||x - x_0||) = ||x - x_0||^{2-n}$ – супергармонічна функція в R^n при $n \geqslant 3$.

Позначимо

$$\underline{P_f}(x_0) = \varliminf_{r \to 0} \frac{2n}{r^2} \Big[M_f^r(x_0) - f(x_0) \Big].$$

Теорема 1. *[1] Для того, щоб функція $u > -\infty$, напівнеперервна знизу на відкритій множині ω простору $\mathbb{R}^n$, була супергармонічною у широкому сенсі, необхідно і достатньо, щоб у кожній точці $x \in \omega$, у якій значення $u(x)$ – кінцеве, виконувалась нерівність $\underline{P}_u(x) \leqslant 0$.*

Наведений критерій Бляшке-Привалова є локальним критерієм гіпергармонічності. Він показує, зокрема, що функція $u > -\infty$, напівнеперервна знизу на множині ω, є супергармонічною у широкому сенсі, якщо нерівність $u(x_0) \geqslant M_f^r(x_0)$ виконується у кожній точці $x_0 \in \omega$ для всіх достатьо малих значень $r (r \geqslant \varepsilon(x_0)$, де $\varepsilon(x_0)$ - строго додатня функція від x_0).

Відмітимо, що якщо u - супергармонічна у широкому сенсі функція у ω, тоді для будь-якого замкненого шару $\overline{B}$, що лежить у ω, функція u_B, що дорівнює u поза B і дорівнює інтегралу Пуассона I_u^B у B (I_u^B скінчений та гармонічний або дорівнює константі $+\infty$) також є супергармонічною у широкому сенсі.

Основні результати

Теорема 2. *Нехай $n, m \in \mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$, G — область у $\mathbb{R}^n$, $f \in C^{2m-2}(\mathbb{R})$, і нехай при всіх $x \in \mathbb{R}^n$ та $r > 0$ виконується умова*

$$\varliminf_{r\to+0}\left(M_r f(x) - \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\Delta^k f(x)}{2^{2k}k!\Gamma(k+n/2)}r^{2k}\right)r^{-2m} \leqslant 0$$
$$\leqslant \varlimsup_{r\to+0}\left(M_r f(x) - \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\Delta^k f(x)}{2^{2k}k!\Gamma(k+n/2)}r^{2k}\right)r^{-2m}, \quad (1)$$

де $M_r f(x)$ позначає середнє значення функції f за сферою радіуса r з центром у точці x, Δ — оператор Лапласа, тоді f — полігармонічна функція порядку не вище m в G.

Доведення.

Доведемо, що f — полігармонічна функція порядку не вище m в G. При $m = 1$ сформульоване твердження співпадає з класичною теоремою Бляшке-Привалова, що характеризує гармонічні функції.

Зафіксуємо довільним чином $\varepsilon > 0$ та розглянемо функцію $f_\varepsilon(x) := f(x) + \varepsilon|x|^{2m}$, де $|x| := (x_1^2 + \ldots x_n^2)^{1/2}$ ($x = (x_1, \ldots, x_n)$). Легко бачити, що $f_\varepsilon \in C^{2m-2}(G)$. Так як для функції $g(x) := |x|^{2m}$ має місце тотожність

$$\Delta^m g(x) = \Delta^m |x|^{2m} \equiv 2^{2m}\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(m+n/2)}{\Gamma(n/2)},$$

яке є окремим випадком формули

$$\Delta^p r^k = k(k-2)...)k-2p+2)(k-2+n)(k-4+n)...(k-2p+n)r^{k-2p} =$$
$$= 2^{2p}\frac{\Gamma(k/2+1)\Gamma((k+n)/2)}{\Gamma(k/2-p+1)\Gamma((k+n)/2-p)}r^{k-2p}.$$

(див. [8]), а отже і тотожність

$$\lim_{r\to+0}\left(M_r g(x) - \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\Delta^k g(x)}{2^{2k}k!\Gamma(k+n/2)}r^{2k}\right)r^{-2m}$$
$$\equiv 2^{2m}\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(m+n/2)}{\Gamma(n/2)}\frac{\Gamma(n/2)}{2^{2m}m!\Gamma(m+n/2)} = 1, \quad (2)$$

у якій границя у лівій частині існує, то з (1) та (2) випливає, що для всіх $x \in G$ виконуються нерівності

$$\varlimsup_{r \to +0} \left(M_r f_\varepsilon(x) - \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Delta^k f_\varepsilon(x)}{2^{2k} k! \Gamma(k+n/2)} r^{2k} \right) r^{-2m} \geqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Позначимо через $S(x,r)$ и $B(x,r)$ відповідно евклідову сферу та відкрите екввклідове коло з центом у точці x радиусу r. За формулою Пізетті

$$\frac{1}{\Omega} \int\int_\Omega u d\Omega = u_0 \Gamma(n/2) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu (\frac{R\sqrt{c}}{2})^{2\nu}}{\nu! \Gamma(\nu + \frac{n}{2})} =$$
$$= u_0 \frac{\Gamma(n/2) J_{(n-2)/2}(R\sqrt{c}}{\frac{R\sqrt{c}}{2}^{(n-2)/2}} = u_0 p(R)$$

де $J_\nu(x)$ є ν-та функція Беселя (див. [2]).

Для будь-якої функції $h \in C^{2m-2}$ має місце рівність

$$M_r h(x) \quad = \quad \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sum_{k=0}^{m-2} \frac{\Delta^k h(x)}{2^{2k} k! \Gamma(k+n/2)} r^{2k} \quad + \quad \int_{B(0,r)} v_{m-2}(y) \Delta^{m-1} h(x \quad + \quad y)\, dy. \tag{4}$$

Також для функції f_ε виконується

$$M_r f_\varepsilon(x) \quad = \quad \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sum_{k=0}^{m-2} \frac{\Delta^k f_\varepsilon(x)}{2^{2k} k! \Gamma(k+n/2)} r^{2k} \quad + \quad \int_{B(0,r)} v_{m-2}(y) \Delta^{m-1} f_\varepsilon(x \quad + \quad y)\, dy, \tag{5}$$

де $v_{m-2}(y)$ — додатня радіальна функція, що визначена рекурентними співвідношеннями

$$v_{\nu+1} = \int\int_r^R p v_\nu(p) \log\frac{p}{r} dp, \qquad v_0 = \frac{1}{2\pi} \log\frac{R}{r}$$

та

$$v_{\nu+1} = \frac{1}{(n-2) r^{n-2}} \int_r^R p v_\nu(p) (p^{n-2} - r^{n-2}) dp, \qquad v_0 = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \left(\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}}\right)$$

(див. [2]).

Підставляючи у (4) $h(x) = |x|^{2m-2}$, маємо $M_r f(0) = r^{2m-2}$,

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sum_{k=0}^{m-2} \frac{\Delta^k h(x)}{2^{2k} k! \Gamma(k+n/2)} r^{2k} = 0, \quad \Delta^{m-1} h(x) \equiv \frac{2^{2m-2} \Gamma(m) \Gamma(m-1+n/2)}{\Gamma(n/2)},$$

звідки отримуємо

$$\int_{B(0,r)} v_{m-2}(y)\, dy = \frac{\Gamma(n/2)}{2^{2m-2} \Gamma(m) \Gamma(m-1+n/2)} r^{2m-2}.$$

Отже,

$$M_r f_\varepsilon(x) - \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\Delta^k f_\varepsilon(x)}{2^{2k}k!\Gamma(k+n/2)}r^{2k} =$$

$$= \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{k=0}^{m-2}\frac{\Delta^k f_\varepsilon(x)}{2^{2k}k!\Gamma(k+n/2)}r^{2k} + \int_{B(0,r)} v_{m-2}(y)\Delta^{m-1} f_\varepsilon(x+y)\,dy -$$

$$-\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\Delta^k f_\varepsilon(x)}{2^{2k}k!\Gamma(k+n/2)}r^{2k}\times$$

$$= \times\int_{B(0,r)} v_{m-2}(y)\big(\Delta^{m-1} f_\varepsilon(x+y) - \Delta^{m-1} f_\varepsilon(x)\big)\,dy =$$

$$= \frac{\Gamma(n/2)}{2^{2m-2}\Gamma(m)\Gamma(m-1+n/2)}r^{2m-2}n\int_0^1 v_{m-2}(rt)\big(M_{rt}\Delta^{m-1} f_\varepsilon(x) - \Delta^{m-1} f_\varepsilon(x)\big)\,dt. \qquad (6)$$

Порівнюючи (3) та (6) маємо нерівність

$$\varlimsup_{r\to+0}\frac{\Gamma(n/2)}{2^{2m-2}\Gamma(m)\Gamma(m-1+n/2)}r^{-2}n\times$$

$$\times\int_0^1 v_{m-2}(rt)\big(M_{rt}\Delta^{m-1} f_\varepsilon(x) - \Delta^{m-1} f_\varepsilon(x)\big)\,dt \geqslant \varepsilon,$$

з якого, повторюючи дії, проведені у випадку $n = 1$, ми робимо висновок, що функція $\Delta^{m-1} f_\varepsilon(x)$ задовольняє класичній умові Бляшке-Привалова (за сферою) у кожній точці області G.

Отже, за теоремою Бляшке-Привалова ця функція є субгармонічною у G для будь-якого $\varepsilon > 0$.

Переходячи до границі при $\varepsilon \to +0$, ми робимо висновок, що функція $\Delta^{m-1} f$ субгармонічна у G. Проводячи аналогічні дії з $\varepsilon < 0$ та граничним перехідом при $\varepsilon \to -0$, ми також робимо висновок, що ця функція супергармонічна в G. Звідси випливає, що функція $\Delta^{m-1} f$ гармонічна, а отже f — полігармонічна функція порядку m. □

Наслідок 1. *Нехай* $m \in \mathbb{N}$, $f \in C^{2m-2}(\mathbb{R})$, *і для всіх* $x \in \mathbb{R}$ *та* $r > 0$ *виконується умова*

$$\varliminf_{r\to+0}\left(\frac{f(x-r)+f(x+r)}{2} - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!}r^{2k}\right)r^{-2m} \leqslant 0$$

$$\leqslant \varlimsup_{r\to+0}\left(\frac{f(x-r)+f(x+r)}{2} - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!}r^{2k}\right)r^{-2m}. \qquad (7)$$

Тоді f *— поліном степеня не вище* $2m-1$.

Висновки

Таким чином, отримано узагальнену теорему Бляшке-Привалова для полігармонічних функцій у просторі $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$. За допомогою теорії спеціальних функцій та відомої формули Пізетті сформульовано характеризації функції за допомогою середнього значення. При $m = 1$ сформульоване твердження співпадає з класичною теоремою Бляшке-Привалова, що характеризує гармонічні функції.

Література

[1] *Брело М.* Основи класичної теорії потенціалу. - М.: Мир, 1964. - 208 с.

[2] *Курант Р.* Уравнения с частными производными / Р. Курант – М.: Мир, 1964. – 830 с.

[3] *Ноздрановська А.В.* Теорема про середнє для функцій спеціального виду/ А. В. Ноздрановська // Вісник ДонНУ. – 2016. – Сер. А: Природничі науки, Т. 1. – С. 148–151.

[4] *Покровский А. В.* Теоремы о среднем для решений линейных дифференциальных уравнений с частными производными / А. В. Покровский // Мат. заметки. – 1998. – Т. 64, № 2 — С. 260–272.

[5] *Привалов И. И.* Субгармонические функции / И. И. Привалов – М., Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1937. – 199 с.

[6] *Трофименко О. Д.* Узагальнення теореми про середнє для поліаналітичних функцій у випадках кола та круга / О. Д. Трофименко // Вісник ДонНУ. – 2009. – Сер. А: Природничі науки, Т. 1. – С. 28–31.

[7] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными/ Л. Хермандер – М.: Мир, 1986. – Т.1 – 462 с.

[8] *Nachman Aronszajn, Thomas M. Creese, Leonard J. Lipkin* Polyharmonic functions. // Clarendon Press, –1983. – P. 265.

[9] *Iwasaki K.* Polytopes and the mean value property / K. Iwasaki // Discrete and Comput. Geometry – 1997. – V. 17. – P. 163–189.

[10] *Iwasaki K.* Invariants of finite reflection groups and the mean value problem for polytopes / K. Iwasaki // Bull. London Math. Soc. – 1999. – V. 31. – P. 477–483.

[11] *Netuka I.* Mean value property and harmonic functions / I.Netuka and J.Vesely // Classical and Modern Potential Theory and Applications, Gowri Sankaran et al., ed. – Kluwer acad. Publ., 1994. – P. 359–398.

[12] *Nozdranovska A.V., Trofymenko O.D.* Mean value theorem for the function of the special type/ A.V.Nozdranovska, O.D.Trofymenko. // Book of abstracts 5th international conference for young scientists on Differential equation and application dedicated to Yaroslav Lopatynsky. – 2016. – Vasy'l Stus Donetsk National University, Vinnytsia, T. 1. – C. 108–109.

[13] *Nozdranovska A.V.* On the equivalent definition of polyharmonic functions. //International conference of young mathematicians dedicated to the 100th anniversary of Academician of Nationfl Academe of Science of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy(1917-2008)– 2017. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, T. 1. – C. 36.

[14] *Pizzetti P.* Sulla media dei valori che una funzione dei punti dello spazio assume alla superficie di una sfera/ P. Pizzetti // Rendiconti Lincei, serie V. – 1909. – V.18. – P. 182–185.

[15] *Ramsey T.* Mean values and classes of harmonic functions / T.Ramsey and Y.Weit // Math. Proc. Camb. Dhil. Soc. – 1984. – V. 96. – P. 501–505.

[16] *Reade M.* A theorem of Fédoroff / M. Reade // Duke Math. J. – 1951. – V. 18. – P. 105–109.

[17] *Reade M.* On areol monogenic functions / M. Reade // Bulletin of the Amer. Math. Soc. – 1947. – V. 53. – P. 98–103.

[18] *Trofymenko O. D.* Two-radii theorem for solutions of some mean value equations / O. D. Trofymenko // Мат. студії. – 2013. – Т 40, № 2. – С. 137–143.

[19] *Trofymenko O. D.* Convolution equations and mean-value theorems for solutions of linear elliptic equations with constant coefficients in the complex plane // Journal of Mathemati-

cal Sciences. – 2018. – Volume 229. – Issue 1. – P.96-107.

[20] *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers. 2003. – 454 p.

[21] *Volchkov V. V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – Series: Springer Monographs in Math., 2009. – 216 p.

[22] *Zalcman L.* Mean values and differential equations / L. Zalcman // Israel J.Math. – 1973. – V. 14 – P. 339–352.

Trofymenko O. D., Levchuk A. V.

Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis and Differential Equations,
student of the Department of Mathematical Analysis and Differential Equations,
Vasyl' Stus Donetsk National University

BLASCHKE-PRIVALOV THEOREM FOR POLYHARMONIC FUNCTIONS

SUMMARY

The problem of polyharmonicity in n-dimensional space is analyzed and the generalized Blaschke-Privalov theorem for polyharmonic functions is obtained in the work. Particular attention is paid to the superharmonic function, polynomial's order and to the corresponding mean value formulas.

Key words: *polyharmonicity, subharmonic and superharmonic function, Blaschke- Privalov theorem.*

Трофименко О. Д., Левчук А. В.

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений,
студент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений,
Донецкий национальный университет имени Васыля Стуса

ТЕОРЕМА БЛЯШКЕ-ПРИВАЛОВА ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

РЕЗЮМЕ

В работе проанализирован вопрос полигармоничности в n-мерном пространстве и получена обобщенная теорема Бляшке-Привалова для полигармонических функций. Особенное внимание уделяется понятию супергармоничности функции, порядку полиномов и соответствующим формулам со средним значением.

Ключевые слова: *полигармоничность, супергармоническая и субгармоническая функция, теорема Бляшке-Привалова.*