УДК 539.3

ГРАНИЧНА РІВНОВАГА ЗАМКНУТОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ПОЗДОВЖНЬОЮ ТРІЩИНОЮ ЗА ЗМІННОГО В ЧАСІ НАВАНТАЖЕННЯ

М.М. Николишин, М.І. Махоркін
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Розглянуто задачу про граничну рівновагу замкненої безмежної циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною, котра перебуває під дією навантаження, що змінюється з часом за експоненціальним законом. Побудовано систему сингулярних інтегральних рівнянь для випадку симетричного навантаження тріщини.

Ключові слова: циліндрична оболонка, тріщина, змінне навантаження, експоненціальна залежність від часу, система сингулярних інтегральних рівнянь.

Вступ. В авіа- та ракетобудуванні, хімічному машинобудуванні, атомній енергетиці, промисловому будівництві тощо широко використовуються конструкційні елементи оболонкового виду. Оцінка надійності конструкцій та систем, які містять концентратори напружень (гострокінцеві технологічні розрізи, дефекти типу тріщин чи включень), значною мірою ґрунтується на аналізі напружено-деформованого стану в їх околі. Оскільки найпоширенішим дефектом, котрий призводить до руйнування, є гострокінцева тріщина, питання, що стосуються дослідження її виникнення та розвитку при різного роду навантаженнях привертають особливу увагу, а вивчення напружень та деформацій в околі кінців тріщини за допомогою експериментальних та теоретичних методів розглянуте у численних наукових працях [1–3].

Доволі вичерпний огляд теорій та методів розв'язування задач про напружено-деформований стан різного роду оболонок із тріщинами подано в монографіях [1, 4] та в статтях [1, 5–7]. Результати переважно отримані методом граничних інтегральних рівнянь для ізотропних і анізотропних, однорідних і кусково-однорідних оболонок під статичним навантаженням.

Як засвідчив аналіз наукової літератури, сучасний математичний апарат уможливлює побудову адекватних математичних моделей для довільного навантаження. Незважаючи на це, порівняно мало досліджень стосується оболонок з тріщинами, що перебувають під дією змінного в часі навантаження. З переліком праць, що стосуються даної проблематики можна ознайомитися у оглядах статей [1, 8–11]. Певні дослідження пружних коливань циліндричних оболонок з поздовжніми тріщинами виконане у працях [8, 9], а окремі динамічні задачі для циліндричних оболонок розглянуті в [10, 11].

У даній праці побудовано систему сингулярних інтегральних рівнянь для замкнутої циліндричної оболонки з поздовжнім розрізом, що перебуває під дією змінного в часі навантаження.

Постановка задачі. Розглядаємо замкнену безмежну циліндричну оболонку з наскрізним поздовжнім розрізом (рис. 1), довжина якого – $2l$ (початок системи координат оберемо посередині розрізу) та вважаємо, що оболонка перебуває під дією поверхневого навантаження, яке змінюється за експоненціальним законом.

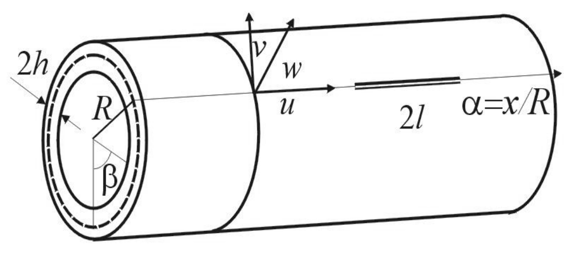

Рис. 1

За вказаних умов поле вільних від напружень деформацій [2], несумісність яких зумовлює стрибки переміщень та кутів повороту вздовж розрізу, матиме такий вигляд:

$$\begin{gathered}\varepsilon_{\beta\beta}^{0}=\varepsilon_{\beta\beta}^{*}e^{\gamma\tau}=R^{-1}\left[v(\alpha,\tau)\right]\delta(\beta),\quad \varepsilon_{\alpha\beta}^{0}=\varepsilon_{\alpha\beta}^{*}e^{\gamma\tau}=R^{-1}\left[u(\alpha,\tau)\right]\delta(\alpha),\\ \kappa_{\beta\beta}^{0}=\kappa_{\beta\beta}^{*}e^{\gamma\tau}=-R^{-1}\left\{\left[\theta_{\beta}(\alpha,\tau)\right]\delta(\beta)-R^{-2}\left[w(\alpha,\tau)\right]\partial_{\beta}\delta(\beta)\right\},\\ \kappa_{\alpha\beta}^{0}=\kappa_{\alpha\beta}^{*}e^{\gamma\tau}=-R^{-2}\partial_{\alpha}\left[w(\alpha,\tau)\right]\delta(\beta),\quad \varepsilon_{\alpha\alpha}^{0}=\kappa_{\alpha\alpha}^{0}=0,\end{gathered}\tag{1}$$

де ε_{ij}^{*}, κ_{ij}^{*} $(i,j=\alpha,\beta)$ залежать від координат;

$$\begin{gathered}\left[u(\alpha,\tau)\right]=\left[u^{*}(\alpha)\right]e^{\gamma\tau},\quad \left[v(\alpha)\right]=\left[v^{*}(\alpha)\right]e^{\gamma\tau},\\ \left[w(\alpha,\tau)\right]=\left[w^{*}(\alpha)\right]e^{\gamma\tau},\quad \left[\theta_{\beta}(\alpha)\right]=\left[\theta_{\beta}^{*}(\alpha)\right]e^{\gamma\tau}\end{gathered}\tag{2}$$

– стрибки переміщень та кутів повороту; τ – час; γ – деякий сталий коефіцієнт розмірності [c^{-1}]; $\delta(\beta)$ – дельта функція Дірака; $\partial_j^n = \partial^n / \partial j^n \quad (n = 1,2,3,...)$, $j = \alpha, \beta, \tau$.

Умови на берегах тріщини [2] в загальному вигляді запишемо так

$$\begin{gathered} N_2^+(\alpha,0,\tau) = N_2^-(\alpha,0,\tau) = f_1(\alpha,\tau), \quad S^+(\alpha,0,\tau) = S^-(\alpha,0,\tau) = f_2(\alpha,\tau), \\ M_2^+(\alpha,0,\tau) = M_2^-(\alpha,0,\tau) = f_3(\alpha,\tau), \quad Q_2^{+*}(\alpha,0,\tau) = Q_2^{-*}(\alpha,0,\tau) = f_4(\alpha,\tau). \end{gathered} \tag{3}$$

Тут

$$\begin{gathered} f_1(\alpha,\tau) = N_2^1(\alpha,+0,\tau) - N_2^0(\alpha,+0,\tau), \quad f_2(\alpha,\tau) = S^1(\alpha,+0,\tau) - S^0(\alpha,+0,\tau), \\ f_3(\alpha,\tau) = M_2^1(\alpha,+0,\tau) - M_2^0(\alpha,+0,\tau), \quad f_4(\alpha,\tau) = Q_2^{*1}(\alpha,+0,\tau) - Q_2^{*0}(\alpha,+0,\tau), \end{gathered} \tag{4}$$

N_2^0, S^0, Q_2^{*0}, M_2^0 – нормальне, зсувне, узагальнене перерізуюче зусилля та згинний момент в оболонці без тріщини відповідно; N_2^1, S^1, Q_2^{*1}, M_2^1 – ці ж зусилля, прикладені до берегів реальної тріщини.

Зважаючи на те, що зовнішні навантаження змінюються в часі за експоненціальним законом відповідні зусилля можна подати так:

$$\begin{gathered} N_2^i(\alpha,\beta,\tau) = N_2^{i*}(\alpha,\beta) e^{\gamma\tau}, \quad S^i(\alpha,\beta,\tau) = S^{i*}(\alpha,\beta) e^{\gamma\tau}, \\ M_2^i(\alpha,\beta,\tau) = M_2^{i*}(\alpha,\beta) e^{\gamma\tau}, \quad Q_2^{*i}(\alpha,\beta,\tau) = Q_2^{**i}(\alpha,\beta) e^{\gamma\tau}, \quad (i = 0,1), \end{gathered} \tag{5}$$

а функції $f_j \quad (j = \overline{1,4})$ набудуть вигляду

$$f_j(\alpha,\tau) = f_j^*(\alpha) e^{\gamma\tau} \left(j = \overline{1,4} \right), \tag{6}$$

де $f_j^*(\alpha,\tau)$ отримано заміною у виразах (4) зусиль N_2^i, S^i, M_2^i, Q_2^{*i} значеннями N_2^{i*}, S^{i*}, M_2^{i*}, Q_2^{**i}.

Ключові функції задачі. Система рівнянь рівноваги в переміщеннях відповідно до [2, 4] має вигляд

$$L_{k1}u + L_{k2}v + L_{k3}w - R^2 c_\tau^{-2} \ddot{g}_k = q_k^{0*} \quad (k = 1,2,3). \tag{7}$$

Тут

$$L_{11} = \partial_\alpha^2 + 0{,}5\nu_-^{-1}\partial_\beta^2, \quad L_{12} = L_{21} = 0{,}5\nu_+^{-1}\partial_\alpha\partial_\beta, \quad L_{13} = L_{31} = \nu\partial_\alpha,$$

$$L_{22} = 0{,}5\nu_-^{-1}\partial_\alpha^2 + \partial_\beta^2 + c_1^2\left[2\nu_-^{-1}\partial_\alpha^2 + \partial_\beta^2\right], \quad L_{23} = L_{32} = \partial_\beta - c_1^2\left[(2-\nu)\partial_\alpha^2\partial_\beta + \partial_\beta^3\right],$$

$$L_{33} = 1 + c_1^2\nabla^2\nabla^2, \quad q_1^{0*} = R\left(\nu\partial_\alpha\varepsilon_{\beta\beta}^0 + 0{,}5\nu_-^{-1}\partial_\beta\varepsilon_{\alpha\beta}^0\right),$$

$$q_2^{0*} = R\left(\partial_\beta\varepsilon_{\beta\beta}^0 + 0{,}5\nu_-^{-1}\partial_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta}^0\right) + \frac{h^2}{3}\left[\partial_\beta\kappa_{\beta\beta}^0 + 2\nu_-^{-1}\partial_\alpha\kappa_{\alpha\beta}^0\right],$$

$$q_3^{0*} = R\varepsilon_{\beta\beta}^0 - \frac{h^2}{3}\left[\nu\partial_\alpha^2\kappa_{\beta\beta}^0 + 2\nu_-^{-1}\partial_\alpha\partial_\beta\kappa_{\alpha\beta}^0 + \partial_\alpha^2\kappa_{\beta\beta}^0\right], \quad \nabla^2 = \partial_\alpha^2 + \partial_\beta^2,$$

$$\partial_j^n\partial_l^k = \frac{\partial^{n+k}}{\partial j \partial l} \quad (j,l = \alpha,\beta; \; n,k = 1,2,3,...), \quad c_\tau^2 = E\rho^{-1}(1-\nu^2)^2, \quad c_1^2 = \frac{h^2}{3R^2}, \quad \nu_\pm = (1 \pm \nu)^{-1},$$

E – модуль Юнга, ρ – густина матеріалу.

Застосувавши для розв'язування системи (7) операторний метод [12, 13], подамо розв’язок системи диференціальних рівнянь через ключові функції φ_j, ψ_j $(j = 1,2)$ так:

$$\begin{gathered} u(\alpha,\tau) = u^*(\alpha) e^{\gamma\tau} = R\sum_{j=2}^{3}\left(L_{ju}^*\varphi_j + P_{ju}^*\psi_j\right)e^{\gamma\tau}, \\ v(\alpha,\tau) = v^*(\alpha) e^{\gamma\tau} = R\sum_{j=2}^{3}\left(L_{jv}^*\varphi_j + P_{jv}^*\psi_j\right)e^{\gamma\tau}, \\ w(\alpha,\tau) = w^*(\alpha) e^{\gamma\tau} = R\sum_{j=2}^{3}\left(L_{jw}^*\varphi_j + P_{jw}^*\psi_j\right)e^{\gamma\tau}. \end{gathered} \tag{8}$$

Тут

$$L_{kl}^{*} = L_{kl} + L_{kl}^{**}, \ P_{kl}^{*} = P_{kl} + P_{kl}^{**} \ \left(l = u, v, w \right), \tag{9}$$

L_{kl}, P_{kl} – оператори тотожні поданим у [1] для випадку статичного навантаження, а L_{kl}^{**}, P_{kl}^{**} – обумовлені залежністю навантаження від часу оператори, що мають такий вигляд:

$$L_{2u}^{**} = \gamma_1^2 \left[4\nu\partial_\alpha^3 - 2\nu_-^2 \left(\partial_\alpha^5 + \partial_\alpha\partial_\beta^4 + 2\partial_\alpha^3\partial_\beta^2 - \partial_\alpha\partial_\beta^3 \right) + c_1^{-2} \left(\nu\partial_\alpha^3 - \partial_\alpha\partial_\beta^2 \right) \right] - \gamma_1^4 2\nu c_1^{-2}\nu_+\partial_\alpha,$$

$$L_{3u}^{**} = \gamma_1^2 \left[\partial_\beta^3 - \partial_\beta^5 - 2\partial_\alpha^2\partial_\beta^3 - \partial_\alpha^4\partial_\beta + c_1^{-2} \left(\partial_\beta^3 - \partial_\beta - \nu\partial_\alpha^2\partial_\beta \right) \right] - \gamma_1^4 c_1^{-2}\partial_\beta,$$

$$P_{u2}^{**} = -\gamma_1^2\nu_-^{-1} \left[2\nu^2\partial_\alpha^3 + (1+3\nu)\partial_\alpha\partial_\beta^2 \right], \quad P_{u3}^{**} = -2\gamma_1^2 \left(1+3\nu \right)\partial_\alpha^2\partial_\beta,$$

$$L_{2v}^{**} = -\gamma_1^2 2\nu\nu_- \left[\partial_\beta^5 + \partial_\beta^3 + 2\partial_\alpha^2\partial_\beta^3 + \partial_\alpha^4\partial_\beta + (2-\nu)\partial_\alpha^2\partial_\beta - 0,5c_1^{-2}\nu_-^{-1} \left(\partial_\beta^3 + (2+\nu)\partial_\alpha^2\partial_\beta \right) \right] -$$

$$-\gamma_1^4 2c_1^{-2}\nu_-\partial_\beta, \quad L_{3v}^{**} = \gamma_1^2 \left[c_1^{-2} \left(\partial_\alpha^3 - \partial_\alpha - \nu\partial_\alpha\partial_\beta^2 \right) - \partial_\alpha^2 - \partial_\alpha\partial_\beta^4 - 2\partial_\alpha^3\partial_\beta^2 \right] - \gamma_1^4 c_1^{-2}\partial_\alpha,$$

$$P_{2v}^{**} = -\gamma_1^2\nu_-^{-1} \left[\partial_\alpha^2\partial_\beta - 2\nu_-\partial_\beta - (1+\nu)\nu_-\partial_\beta^3 - c_1^2 2\nu_-^{-1}\partial_\alpha^4\partial_\beta \right] - \gamma_1^4 2\nu_-\partial_\beta,$$

$$P_{3v}^{**} = \gamma_1^4 4 \left[\partial_\alpha^3 - \partial_\alpha - 2(1+\nu)\partial_\alpha\partial_\beta^2 - c_1^2 \left(\partial_\alpha^5 + \nu\partial_\alpha^3\partial_\beta^2 \right) \right] - 4\gamma_1^4\partial_\alpha, \quad L_{2w} = \partial_\beta^6 + \partial_\beta^4 + 4\partial_\alpha^2\partial_\beta^4 +$$

$$+ 4\partial_\alpha^2\partial_\beta^2 + (4-\nu^2)\partial_\alpha^4\partial_\beta^2 + c1^{-2}\nu_-^{-1}\nu_+^{-1}\partial_\alpha^4, \quad L_{2w}^{**} = \gamma_1^4 2c_1^{-2}\nu_- - \gamma_1^2 \left[2(2-\nu)\nu_-\partial_\alpha^2\partial_\beta^2 + \right. \qquad ,$$

$$\left. + c_1^{-2} \left(\partial_\beta^2 + (3+2\nu)\partial_\alpha^2 \right) \right], \quad L_{3w}^{**} = \gamma_1^2 \left[\partial_\alpha\partial_\beta^2 + (2-\nu)\partial_\alpha^3\partial_\beta - c_1^{-2}(1+\nu)\partial_\alpha\partial_\beta \right],$$

$$P_{2w}^{**} = \gamma_1^2 (1-\nu)^{-1} \left[2\partial_\beta^2 + (3-\nu) \left(\partial_\beta^4 + \nu\partial_\alpha^4 + (1+\nu)\partial_\alpha^2\partial_\beta^2 \right) \right] - \gamma_1^4 2(1-\nu) \left(\partial_\beta^2 + \nu\partial_\alpha^2 \right),$$

$$P_{3w}^{**} = \gamma_1^2 \left[4\partial_\alpha\partial_\beta^2 + 2(3-\nu) \left(\partial_\alpha\partial_\beta^3 + \partial_\alpha^3\partial_\beta \right) \right] - 4\gamma_1^4\partial_\alpha\partial_\beta, \quad \gamma_1 = R^2\gamma^2 c_\tau^{-2}.$$

Функції φ_j, ψ_j повинні задовольняти такі рівняння:

$$D\varphi_2 = \varepsilon_{22}^{*}, \ D\varphi_3 = \varepsilon_{12}^{*}, \ D\psi_2 = R\kappa_{22}^{*}, \ D\psi_3 = R\kappa_{12}^{*}, \tag{10}$$

де

$$D = D^0 + D^{*} + D^{**}, \tag{11}$$

$D^0 = \nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2$, $D^{*} = \left(8 - 2\nu^2 \right)\partial_\alpha^4\partial_\beta^2 + 8\partial_\alpha^2\partial_\beta^4 + 2\partial_\beta^6 + \dfrac{1-\nu^2}{c_1^2}\partial_\alpha^4 + 4\partial_\alpha^2\partial_\beta^2 + \partial_\beta^4$ – оператори, вигляд яких збігається із поданим у [1] для випадку статичного навантаження, D^{**} – оператор, обумовлений залежністю навантаження від часу

$$D^{**} = 2\gamma_1^6\nu_- c_1^{-2} + 2\gamma_1^4 (1-\nu)^{-1} c_1^{-2} \left\{ \left(8 - 2\nu^2 \right)\partial_\alpha^4\partial_\beta^2 + c_1^2 \left[\nabla^2\nabla^2 - \partial_\beta^2 - 2\nu_-^{-1}\partial_\alpha^2 \right] \right\} +$$

$$+ \gamma_1^2 \left\{ c_1^{-2} \left[\nabla^2\nabla^2 - \partial_\beta^2 - \left(3 + 2\nu \right)\partial_\alpha^2 \right] + 2\nu_- \left[0,5(\nu-3)\nabla^2\nabla^2\nabla^2 - 0,5(3+\nu)\partial_\beta^4 + \right. \right. \tag{12}$$

$$\left. \left. + 2\nu_-^{-1} \left(\partial_\alpha^4 - \partial_\beta^2 \right) - \left(2 - \nu^2 \right)\partial_\alpha^2\partial_\beta^2 \right] - 2c_1^2 \left[2\nu_-^{-1}\partial_\alpha^6 + \nu_-^{-1}\nu_+^{-1}\partial_\alpha^4\partial_\beta^2 \right] \right\}$$

Розв'язок рівнянь (10) подамо у вигляді інтеграла типу згортки:

$$\Psi' = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\alpha, \beta, \xi, \theta \right) \vartheta^{*}\left(\xi \right) d\xi. \tag{13}$$

Тут $\Psi' = \left\{ \varphi_2, \varphi_3, \psi_2, \psi_3 \right\}$; $\vartheta^{*}\left(\xi \right) = \left\{ \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \kappa_{22}, \kappa_{12} \right\}$; $\Phi\left(\alpha, \beta, \xi, \theta \right)$ – фундаментальний розв'язок (функція Гріна) для безмежно довгої циліндричної оболонки

$$\Phi\left(\alpha, \beta, \xi, \theta \right) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\delta_{0n}}{2} \right) \Phi_n\left(\alpha, \xi \right) \cos\left[n\left(\beta - \theta \right) \right], \tag{14}$$

$\delta_{0n} = \{1, \text{при } n = 0;\ 0 \text{ при } n \neq 0\}$ – символ Кронеккера.

Враховуючи подання (1), (8) отримаємо вирази для шуканих функцій:

$$\varphi_2(\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\delta_{0n}}{2}\right)\cos n\beta \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\left[v^*(\xi)\right]\Phi_n(\xi-\alpha)\,d\xi,$$

$$\varphi_3(\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\delta_{0n}}{2}\right)\cos n\beta \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\left[u^*(\xi)\right]\Phi_n(\xi-\alpha)\,d\xi,$$

$$\begin{aligned}\psi_2(\alpha,\beta) = &-\frac{1}{\pi R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\delta_{0n}}{2}\right)\cos n\beta \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\left[\theta^*(\xi)\right]\Phi_n(\xi-\alpha)\,d\xi + \\ &+\frac{1}{\pi R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\delta_{0n}}{2}\right)n\sin n\beta \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\left[w^*(\xi)\right]\Phi_n(\xi-\alpha)\,d\xi,\end{aligned} \qquad (15)$$

$$\psi_3(\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\delta_{0n}}{2}\right)\cos n\beta \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\left[w^*(\xi)\right]\frac{d\Phi_n(\xi-\alpha)}{d\alpha}\,d\xi.$$

Функція $\Phi_n(\xi-\alpha)$ визначається виразом подібним до поданого в праці [2]:

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{X_n}\sum_{j=1}^{2}\frac{e^{-a_{jn}|z|}}{q_{jn}\left(a_{jn}^2+b_{jn}^2\right)}\left[\left(b_{jn}C_{in}-a_{jn}B_{jn}\right)\cos b_{jn}z+\left(a_{jn}C_{in}-b_{jn}B_{jn}\right)\sin b_{jn}|z|\right], \qquad (16)$$

де

$$X_n = 2\left(C_{1n}^2+B_{1n}^2\right),\quad C_{1n} = \left(p_{2n}-p_{1n}\right)^2+q_{2n}^2-q_{1n}^2,\quad C_{2n} = \left(p_{1n}-p_{2n}\right)^2+q_{1n}^2-q_{2n}^2,$$

$$B_{1n} = 2\left(p_{2n}-p_{1n}\right)q_{1n},\quad B_{2n} = 2\left(p_{1n}-p_{2n}\right)q_{2n},\quad p_{jn} = a_{jn}^2-b_{jn}^2,\quad q_{jn} = 2a_{jn}b_{jn}.$$

Величини b_{jn} та a_{jn} є дійсною та уявною частинами коренів $y_{1,2,3,4} = \pm\left(b_{1n} \pm ia_{1n}\right)$, $y_{5,6,7,8} = \pm\left(b_{2n} \pm ia_{2n}\right)$ характеристичного рівняння

$$y^8 - A_6y^6 + A_4y^4 - A_2y^2 + A_0 = 0, \qquad (17)$$

$$A_0 = n^4\left(n^2-1\right)^2 + \nu_-\left[2\gamma_1^6c_1^{-2} + \gamma_1^4\left(n^2(3-\nu)c_1^{-2} + 2n^4\right)\right] + \gamma_1^2c_1^{-2}\left(n^2+n^4\right),$$

$$A_2 = 4n^2(n^2-1)^2 + \gamma_1^4\nu_-\left[c_1^{-2}(3-\nu)+4n^2\right] + \gamma_1^2\left[n^2 2c_1^{-2} + 3n^4(3-\nu)\nu_-\right],$$

$$A_4 = 6n^4 + \left(c_1^2\nu_-\nu_+\right)^{-1} + 2\gamma_1^4\nu_- + \gamma_1^2\left[c_1^{-2} + n^2 3\left(3-\nu\right)\nu_-\right],\quad A_6 = 4n^2 + \gamma_1^2(3-\nu)\nu_-.$$

Відзначимо, що на відміну від статичного випадку, розглянутого в [2], рівняння (17) при $n = 0$ та $n = 1$ не має кратних коренів, а тому в (16) вважаємо $n = 0, 1, 2, \ldots$.

З метою виділення особливостей ключових функцій (15) на лінії розрізу подамо їх у вигляді

$$\varphi_j(\alpha,\beta) = \varphi_j^0(\alpha,\beta) + \varphi_j^*(\alpha,\beta),\quad \psi_j(\alpha,\beta) = \psi_j^0(\alpha,\beta) + \psi_j^*(\alpha,\beta), \qquad (18)$$

де

$$\varphi_j^*(\alpha,\beta) = \varphi_j(\alpha,\beta) - \varphi_j^0(\alpha,\beta),\quad \psi_j^*(\alpha,\beta) = \psi_j(\alpha,\beta) - \psi_j^0(\alpha,\beta);$$

Функції $\varphi_j^0(\alpha,\beta)$, $\psi_j^0(\alpha,\beta)$ задовольняють рівняння

$$D^0\varphi_2^0 = \varepsilon_{22}^*\ D^0\varphi_3^0 = \varepsilon_{12}^*,\quad D^0\psi_2^0 = R\kappa_{22}^*,\quad D^0\psi_3^0 = R\kappa_{12}^*,$$

їх визначення докладно описане у [2, 13].

Підставимо вирази (18) у подання (15) та проінтегруємо (15) по частинах, в результаті чого перепишемо їх у такому вигляді:

$$\varphi_2(\alpha,\beta)=\frac{1}{\pi R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\delta_{0n}}{2}\right)\cos n\beta\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\left[v^{*\prime}(\xi)\right]\left[\Psi_n^0(\xi-\alpha)+\Psi_n^*(\xi-\alpha)\right]d\xi,$$

$$\varphi_3(\alpha,\beta)=\frac{1}{\pi R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\delta_{0n}}{2}\right)\cos n\beta\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\left[u^{*\prime}(\xi)\right]\left[\Psi_n^0(\xi-\alpha)+\Psi_n^*(\xi-\alpha)\right]d\xi,$$

$$\psi_2(\alpha,\beta)=-\frac{1}{\pi R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\delta_{0n}}{2}\right)\cos n\beta\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\left[\theta^{*\prime}(\xi)\right]\left[\Psi_n^0(\xi-\alpha)+\Psi_n^*(\xi-\alpha)\right]d\xi+$$

$$+\frac{1}{\pi R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\delta_{0n}}{2}\right)n\sin n\beta\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\left[w^{*\prime}(\xi)\right]\left[\Psi_n^0(\xi-\alpha)+\Psi_n^*(\xi-\alpha)\right]d\xi, \tag{19}$$

$$\psi_3(\alpha,\beta)=-\frac{1}{\pi R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\delta_{0n}}{2}\right)\cos n\beta\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\left[w^{*\prime}(\xi)\right]\left[\Psi_n^0(\xi-\alpha)+\Psi_n^*(\xi-\alpha)\right]d\xi,$$

де

$$\Psi_n(z)=\frac{1}{X_n}\sum_{j=1}^{2}\left\{e^{-a_{jn}|z|}\left[C_{jn}^0\cos b_{jn}z\,\mathrm{sgn}\,z+B_{jn}^0\sin b_{jn}z\right]-C_{jn}^0\,\mathrm{sgn}\,z\right\},$$

$$C_n^0=\frac{q_{jn}C_{jn}-p_{jn}B_{jn}}{q_{jn}\left(a_{jn}^2+b_{jn}^2\right)},\quad B_n^0=\frac{p_{jn}C_{jn}+q_{jn}B_{jn}}{q_{jn}\left(a_{jn}^2+b_{jn}^2\right)}$$

$$\Psi_k^0(z)=\frac{1}{96k^8}e^{-k|z|}\left[k^3z^3+9k^2z^2\,\mathrm{sgn}\,z+33kz+48\,\mathrm{sgn}\,z\right]-\frac{1}{2k^8}\mathrm{sgn}\,z\quad(k=1,2,...).$$

Побудова сингулярних інтегральних рівнянь. Вирази для ключових функцій (15), (19) містять невідомі стрибки переміщень та кутів повороту (2). Для їх визначення скористаємося крайовими умовами (3).

Зусилля та моменти в оболонці визначаються за відомими формулами [2], котрі зважаючи на подання (1), (8) запишемо так:

$$\begin{aligned}
&N_1=N_1^*e^{\gamma t}=D_0\left[(1-\nu^2)R\right]^{-1}\left(\partial_\alpha u^*+\nu\left(\partial_\beta v^*+w^*\right)-\nu R\varepsilon_{22}^*\right)e^{\gamma t},\\
&N_2=N_2^*e^{\gamma t}=D_0\left[(1-\nu^2)R\right]^{-1}\left(\partial_\beta v^*+w^*+\nu\partial_\alpha u^*-R\varepsilon_{22}^*\right)e^{\gamma t},\\
&M_1=M_1^*e^{\gamma t}=-D_0c^2\left[\partial_\alpha^2w^*+\nu\left(\partial_\beta^2w^*-\partial_\beta v^*\right)+\nu R^2\kappa_{22}^*\right]e^{\gamma t},\\
&M_2=M_2^*e^{\gamma t}=-D_0c^2\left(\partial_\beta^2w^*-\partial_\beta v^*+\nu\partial_\alpha^2w^*+R^2\kappa_{22}^*\right),\\
&S=S^*e^{\gamma t}=Eh\left[(1+\nu)R\right]^{-1}\left(\partial_\beta u^*+\partial_\alpha v^*-R\varepsilon_{12}^*\right)e^{\gamma t},\\
&H=H^*e^{\gamma t}=-D_0c^2(1-\nu)\left[\partial_\alpha\left(\partial_\beta w^*-v^*\right)+R^2\kappa_{12}^*\right]e^{\gamma t}.
\end{aligned}\tag{20}$$

У випадку симетричного відносно тріщини навантаження оболонки умови (3) з урахуванням (4)– (6) спрощуються і набувають вигляду

$$N_2^{*+}(\alpha,0)=N_2^{*-}(\alpha,0)=f_1^*(\alpha),\quad M_2^{*+}(\alpha,0)=M_2^{*-}(\alpha,0)=f_3^*(\alpha). \tag{21}$$

Використовуючи у виразах (20) подання (8) отримаємо

$$\begin{aligned}
&N_2^*=C_{N\varphi}\varphi_2+D_{N\varphi}\varphi_3+C_{N\psi}\psi_2+D_{N\psi}\psi_3,\\
&M_2^*=C_{M\varphi}\varphi_2+D_{M\varphi}\varphi_3+C_{M\psi}\psi_2+D_{M\psi}\psi_3,
\end{aligned}\tag{22}$$

де

$$C_{N\varphi}=D_0\left\langle-\partial_\alpha^4\nabla^2\nabla^2-2\gamma_1{}^6c_1{}^{-2}\nu_-^2\nu_+^1+\nu_-\nu_+\gamma_1{}^4\left\{c_1{}^{-2}\left[\partial_\beta^2+(3+2\nu)\partial_\alpha^2\right]-2\nu_-\nabla^2\nabla^2\right\}+\right.$$

$$\left.+\gamma_1{}^2\left\{\nu_-\nu_+\left[\partial_\beta^6+(7+4\nu)\partial_\alpha^4\partial_\beta^2+(5+2\nu)\partial_\alpha^2\partial_\beta^4+(3+2\nu)\partial_\alpha^6\right]-c_1{}^{-2}\partial_\alpha^4+\right\}\right\rangle,$$

$$D_{N\varphi} = D_0\left[\partial_\alpha^3\partial_\beta\nabla^2\nabla^2 - \gamma_1{}^4 c_1{}^{-2}\nu_-\partial_\alpha\partial_\beta + \gamma_1{}^2\left(c_1{}^{-2}\partial_\alpha^3\partial_\beta - \nu_-\partial_\alpha\partial_\beta\nabla^2\nabla^2 - \nu_+\partial_\alpha\partial_\beta^3\right)\right],$$

$$C_{N\psi} = D_0\left\{c_1^2\nu_+\nu_-^{-1}\partial_\alpha^4\partial_\beta^2 P_3 - \gamma_1{}^4 2\nu_-^2\nu_+\left(2\partial_\beta^2 + \nu\partial_\alpha^2\right) - \gamma_1{}^2\nu_-\nu_+ 2c_1{}^2(1-\nu)\partial_\alpha^4\partial_\beta^2\right\},$$

$$D_{N\psi} = D_0\left\{2c_1{}^2\nu_+\partial_\alpha^3\partial_\beta P_3 P_1 - 8\gamma_1{}^4\nu_-\nu_+\partial_\alpha\partial_\beta - \gamma_1{}^2 4c_1{}^2\nu_-\nu_+\partial_\alpha^3\partial_\beta P_1\right\},$$

$$C_{M\varphi} = D_0 R\left\{c_1^2\nu_-^{-1}\nu_+\partial_\alpha^4\partial_\beta^2 P_3 - 2\gamma_1{}^4\nu_-^2\nu_+\left(2\partial_\beta^2 + \nu\partial_\alpha^2\right) + \gamma_1{}^2\nu_+\nu_-\left[-2c_1{}^2(1-\nu)\partial_\alpha^4\partial_\beta^2\right]\right\},$$

$$C_{M\psi} = D_0 R\left\langle -c_1^2\nu_+\left[2\partial_\alpha^2\partial_\beta^6 + (\nu_+^{-1}\partial_\alpha^8 + 2(2+\nu)\partial_\alpha^6\partial_\beta^2 + (5+\nu)\partial_\alpha^4\partial_\beta^4\right] - \partial_\alpha^4 - 2\gamma_1{}^6\nu_-^2\nu_+ - \right.$$

$$\left. -\gamma_1{}^4\nu_-\nu_+\left\{2c_1{}^2\left(2\partial_\alpha^2\partial_\beta^2 + \partial_\alpha^4\right)\right\} + \gamma_1^2\nu_-\nu_+\left\{c_1{}^2(3-\nu)\left[2\partial_\alpha^2\partial_\beta^4 + \nu_+^{-1}\partial_\alpha^6 + (3+\nu)\partial_\alpha^4\partial_\beta^2\right]\right\}\right\rangle,$$

$$D_{M\varphi} = D_0 R\left\{c_1^2\nu_-^{-1}\nu_+\partial_\alpha^5\partial_\beta P_5 - \gamma_1{}^4\nu_-\nu_+\partial_\alpha\partial_\beta - \gamma_1{}^2\nu_-\nu_+\left[c_1{}^2(1-\nu)^2\partial_\alpha^5\partial_\beta\right]\right\},$$

$$D_{M\psi} = 2c_1{}^2 D_0 R v_+\left\langle \nu_-^{-1}\left[\partial_\alpha\partial_\beta^7 + (1+2\nu)\partial_\alpha^5\partial_\beta^3 + \nu\partial_\alpha^7\partial_\beta + (2+\nu)\partial_\alpha^3\partial_\beta^5\right] + 2\gamma_1{}^4\partial_\alpha\partial_\beta P_2 - \right.$$

$$\left. -\gamma_1{}^2(3-\nu)\left[\partial_\alpha\partial_\beta^5 + \nu\partial_\alpha^5\partial_\beta + (1+\nu)\partial_\alpha^3\partial_\beta^3\right]\right\rangle,\quad P_1 = \partial_\alpha^2 + \nu\partial_\beta^2,\quad P_2 = \partial_\beta^2 + \nu\partial_\alpha^2,$$

$$P_3 = (2+\nu)\partial_\alpha^2 + \partial_\beta^2,\ P_4 = (2+\nu)\partial_\beta^2 + \partial_\alpha^2,\ P_4 = \partial_\alpha^2 - \nu\partial_\beta^2,\ P_5 = \partial_\beta^2 - \nu\partial_\alpha^2,\ \nu_\pm = (1\pm\nu)^{-1}.$$

Підставивши в (21) подання (22), з урахуванням (19), отримаємо систему двох інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} &\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\left[F_1(\xi)K_{11}(\xi-\alpha) + F_3(\xi)K_{13}(\xi-\alpha)\right]d\xi = f_1^*(\alpha),\\ &\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\left[F_1(\xi)K_{31}(\xi-\alpha) + F_3(\xi)K_{33}(\xi-\alpha)\right]d\xi = f_3^*(\alpha), \end{aligned} \tag{23}$$

$$F_1(\xi) = \frac{1}{R}\left[v'(\xi)\right],\ \ F_3(\xi) = -\left[\theta_2'(\xi)\right],\ \ f_1^*(\alpha) = \frac{\pi}{D_0}f_1(\alpha),\ \ f_3^*(\xi) = \frac{\pi}{D_0 R}f_3(\alpha).$$

Ядра системи рівнянь можна подати такому вигляді

$$K_{11} = a_{11}\operatorname{cth}\frac{z}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left\langle\left(1 - \frac{\delta_{0n}}{2}\right)\frac{\operatorname{sgn} z}{X_n}\sum_{m=1}^{2}\sum_{l=0}^{3}\gamma_1^{2l}A_{mn}^{(l)}\sum_{i=0}^{2}A_{mn}^{(il)}\omega_i - a_{11}K_n^0\right\rangle \tag{24}$$

де

$$A_{mn}^{(3)} = -2A_{mn}^{(2)},\quad A_{nm}^{(02)} = a_{mn}^{(3)}A_{nm}^{(03)},\quad A_{mn}^{(03)} = B_{mn}p_{mn} - C_{mn}q_{mn},$$

$$A_{mn}^{(13)} = -\left(C_{mn}p_{mn} + B_{mn}q_{mn}\right),\quad A_{mn}^{(2)} = c_1{}^{-2}a_{nm}^{(1)},,\quad A_{nm}^{(12)} = -B_{mn}a_{mn}^{(2)} + 2c_1{}^2 p_{mn}^{+}E_{1n} + a_{mn}^{(3)}A_{mn}^{(23)},$$

$$A_{mn}^{(1)} = (1-\nu)a_{nm}^{(1)},\quad A_{nm}^{(01)} = -n^6 A_{nm}^{(03)},\quad A_{nm}^{(11)} = a_{mn}^{(6)}c_1{}^{-2}E_{1n} - a_{mn}^{(5)}B_{1n} - a_{mn}^{(4)}r_{mn}^{(1)} + n^6 A_{mn}^{(23)},$$

$$A_{nm}^{(10)} = \left(q_{mn}\right)^{-1}\left((n^4 + t_{mn})E_{mn} - 2n^2 r_{mn}^{(1)} - s_{mn}H_{mn}\right),\quad A_{nm}^{(0)} = 1,\quad A_{nm}^{(00)} = 0,$$

$$a_{nm}^{(1)} = \nu_-^2\nu_+\left(q_{mn}p_{mn}^{+}\right)^{-1},\quad a_{mn}^{(2)} = (3 + 4c_1^2 n^2 - \nu - 2\nu^2)p_{mn}^{+},\quad a_{mn}^{(3)} = n^2(\nu_-^{-1} + 2c_1^2 n^2),$$

$$a_{mn}^{(4)} = (3+2\nu)p_{mn}^{+},\quad a_{mn}^{(5)} = n^4(5+2\nu)p_{mn}^{+},\quad p_{mn}^{+} = a_{mn}^2 - b_{mn}^2,$$

$$a_{mn}^{(6)} = \left[\left(\nu_-\nu_+\right)^{-1} + c_1^2 n^2(7+4\nu)\right]p_{mn}^{+},\quad r_{mn}^{(1)} = \left(s_{mn}C_{mn} + t_{mn}B_{mn}\right),\quad t_{mn} = p_{mn}^2 - q_{mn}^2,$$

$$\omega_0 = 1,\quad \omega_1 = e^{-a_{mn}|z|}\cos b_{mn}z,\quad \omega_2 = e^{-a_{mn}|z|}\sin b_{mn}z,\quad E_{mn} = p_{mn}B_{mn} + q_{mn}C_{mn},$$

$$H_{mn} = q_{mn}B_{mn} - p_{mn}C_{mn},\quad s_{mn} = 2p_{mn}q_{mn},\quad A_{mn} = \left(b_{mn}^2 - 3a_{mn}^2\right)b_{mn}C_{mn} -$$

$$-\left(a_{mn}^2-3b_{mn}^2\right)a_{mn}B_{mn}\,,\quad a_{11}=\frac{1}{8}\,,\quad K_0^0(z)=\frac{1}{z}\,,\quad K_i^0=\frac{2^{2i}B_{(2i)}z^{2i-1}}{(2i)!}\,,$$

$$D_{mn}=\left(a_{mn}^2-3b_{mn}^2\right)a_{mn}C_{mn}-\left(b_{mn}^2-3a_{mn}^2\right)b_{mn}B_{mn}\,,$$

$B_{(2i)}$ – числа Бернуллі, подання для $A_{mn}^{(2l)}$ отримаємо з виразів для $A_{mn}^{(1l)}$, формально замінивши в них E_{mn}, H_{mn}, B_{mn}, C_{mn} на H_{mn}, $-E_{mn}$, $-C_{mn}$, B_{mn}.

Вирази для ядер K_{33} та $K_{31}=K_{31}$ отримаємо формальною заміною у поданні (24) коефіцієнтів a_{11}, $A_{mn}^{(l)}$, $A_{mn}^{(il)}$ на a_{33}, $C_{mn}^{(l)}$, $C_{mn}^{(il)}$ та a_{31}, $B_{mn}^{(l)}$, $B_{mn}^{(il)}$ відповідно. Тут

$$a_{13}=-\frac{(1-\nu)(3+\nu)c_1^{\,2}}{64(1+\nu)}\,,\quad a_{33}=\frac{c_1^{\,2}(3+\nu)}{8(1+\nu)}\,,$$

$$C_{mn}^{(10)}=\nu_+\left(q_{mn}\right)^{-1}\Big\{E_{mn}\Big[(1+\nu)\left(1+c_1^{\,2}t_{mn}\right)+c_1^{\,2}n^4(5+\nu)\Big]-$$

$$-2c_1^{\,2}n^2(2+\nu)s_{mn}C_{mn}-c_1^{\,2}\nu_+^{-1}s_{mn}H_{mn}-c_1^{\,2}\Big[2n^6+2n^2(2+\nu)t_{mn}\Big]B_{mn}\Big\},$$

$$C_{mn}^{(0)}=1\,,\quad C_{mn}^{(00)}=0\,,\quad C_{mn}^{(3)}=2\nu_-^2\left(p_{mn}^{+}\right)^{-1},\quad C_{mn}^{(03)}=C_{mn}^{(13)}\,,$$

$$C_{mn}^{(13)}=-C_{mn}+B_{mn}p_{mn}\left(q_{mn}\right)^{-1},\quad C_{mn}^{(2)}=c_1^2\,,\quad C_{mn}^{(02)}=0\,,$$

$$C_{mn}^{(12)}=n^2(3+\nu)E_{mn}-C_{mn}\nu_+^{-1}s_{mn}-B_{mn}\Big[2n^4+\nu_+^{-1}t_{mn}\Big],$$

$$C_{mn}^{(1)}=(3-\nu)c_1^2\nu_-\nu_+\left(q_{mn}\right)^{-1},\ C_{mn}^{(01)}=0\,,\ C_{mn}^{(11)}=2\Big[-2n^2B_{mn}+(1+\nu)E_{mn}\Big]\nu_-\nu_+\left(q_{mn}\right)^{-1},$$

$$B_{mn}^{(0)}=c_1^2\nu_-^{-1}\nu_+\left(q_{mn}\right)^{-1},\quad B_{mn}^{(00)}=0\,,\quad B_{mn}^{(1)}=-2c_1^2n^2\nu_+^{-1}\left(q_{mn}\right)^{-1},\quad B_{mn}^{(02)}=0\,,$$

$$B_{mn}^{(12)}=E_{mn};\quad B_{mn}^{(2)}=\nu_-^2\nu_+\,,\ B_{mn}^{(10)}=-n^4E_{mn}+n^2(2+\nu)C_{mn}s_{mn}+n^2(2+\nu)B_{mn}t_{mn},$$

$$B_{mn}^{(03)}=B_{mn}^{(13)}-2\nu\left(q_{mn}\right)^{-1}B_{mn}\,,\ B_{mn}^{(13)}=\left(p_{mn}^{+}q_{mn}\right)^{-1}\left(4n^2q_{mn}C_{mn}-4n^2p_{mn}B_{mn}+2\nu p_{mn}^{+}B_{mn}\right),$$

Щоб отримати коефіцієнти $B_{mn}^{(2l)}$, $C_{mn}^{(2l)}$ слід у виразах для $B_{mn}^{(1l)}$, $C_{mn}^{(1l)}$ замінити E_{mn}, H_{mn}, B_{mn}, C_{mn} на H_{mn}, $-E_{mn}$, $-C_{mn}$, B_{mn}.

Якщо покласти у (24) $\gamma_1=0$, то система (23) набуде вигляду поданого в [2] для статичного навантаження, проте при числових дослідженнях слід враховувати, що рівняння (17) при $n=0$ у випадку технічної теорії оболонок та $n=0$, $n=1$ у випадку загальної моментної теорії матиме кратні корені.

Висновки. Записано у явному вигляді систему сингулярних інтегральних рівнянь для циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною за змінного в часі навантаження. Достовірність отриманих виразів підтверджується їх збігом у випадку статичного навантаження із відомими співвідношеннями [2]. З'ясовано, що врахування зміни з часом навантаження не впливає на порядок сингулярності СІР. Отримана система рівнянь, за допомогою заміни $u=\xi/\alpha_0$, $s=\alpha/\alpha_0$ приводиться до системи СІР з ядром типу Коші. Це дає змогу здійснювати числове дослідження напружено-деформованого стану в околі кінців тріщини, зокрема, вивчати поведінку динамічних коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів, стандартними методами. Побудовано алгоритм числового розв’язання отриманої системи.

РЕЗЮМЕ

Рассмотрена задача о предельном равновесии замкнутой бесконечной цилиндрической оболочки с продольной трещиной, пребывающей под действием изменяющейся во времени за экспоненциальным законом нагрузки. Построена система сингулярных интегральных уравнений для случая симметрической относительно трещины нагрузки.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, продольная трещина, нагрузка экспоненциально зависящая от времени, система сингулярных интегральных уравнений.

SUMMARY

The problem on limit equilibrium of an infinite cylindrical shell with longitudinal crack under the action of time-varying load by the exponential law has been considered. A system of singular integral equations for the case of symmetric loading of a crack has been constructed.

Keywords: cylindrical shell, crack, exponential time dependence, varying load, system of singular integral equations.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Методи визначення статичних і динамічних напружень у тілах з підповерхневими тріщинами / Г.С. Кіт, Р.М. Кушнір, В.В. Михаськів, М.М. Николишин // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – Т. 47, № 2. – С. 56-66.
2. Кушнір Р.М. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами / Р.М. Кушнір, М.М. Николишин, В.А. Осадчук. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 318 с.
3. Коэффициенты интенсивности напряжений для материалов с межслоевыми трещинами при гармоническом нагружении / А.Н. Гузь, И.А. Гузь, А.В. Меньшиков, В.А. Меньшиков // Прикл. механика. – 2010. – Т. 46, № 10. – С. 3-13.
4. Подстригач Я.С. Термоупругость тонких оболочек / Я.С. Подстригач, Р.Н. Швец. – К.: Наук. думка, 1978. – 344 с.
5. Кушнір Р.М. Напружений стан і гранична рівновага кусково-однорідних циліндричних оболонок з тріщинами/ Р.М.Кушнір, М.М. Николишин // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – Т. 46, № 1. – С. 60-74.
6. Шевченко В.П. Метод граничних інтегральних рівнянь у задачах статики пологих ортотропних оболонок із розрізами й отворами / В.П. Шевченко, К.М. Довбня // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – Т. 46, № 1. – С. 47-59.
7. Довбня К. М. Дослідження напруженого стану ортотропної оболонки довільної кривини з внутрішньою тріщиною / К.М. Довбня, Н.А. Шевцова // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – Т. 54, № 4. – С. 138-142.
8. Тітова О.О. Аналіз пружних коливань циліндричних оболонок з поздовжніми тріщинами / О.О. Тітова, В.П. Ланько // Вісник запорізького національного університету. – 2012. – № 1. – С.161-166.
9. Vibrational power flow analysis of thin cylindrical shell with a circumferential surface crack / X. Zhu, T.Y. Li, Y. Zhao, J. Yan // Journal of Sound and Vibration. – 2007. – Vol. 302, Iss. 1-2. – P. 332-349.
10. Roytman A. Analitical approach to determining dynamic characteristics of a cylinder shell with closing cracks / A.Roytman, O. Titova // Journal of Sound and Vibration. – 2002. – Vol. 254, No 2. – P. 379-386.
11. Pothula S.G. Dynamic response of composite cylindrical shells under external impulsive loads / Pothula S.G. – MSc thesis. University of Akron, 2009. – 71 p.
12. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
13. Підстригач Я.С. Температурні напруження в оболонках / Я.С. Підстригач, С.Я. Ярема – К.: Вид-во АН УРСР, 1961. – 212 с.

Надійшло до редакції 18.09.2013 р.