УДК 519.21

ЯВНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В.ЛЕОНТЬЕВА

А.В. Золотая

В настоящей статье исследуется вопрос продуктивности модели В.Леонтьева. Продуктивность модели зависит от максимального собственного значения технологической матрицы. С использованием классических методов теории матриц, линейной алгебры и теории вероятностей доказана продуктивность модели. Получено решение этой модели и изучено предельное поведение максимального собственного значения.

Ключевые слова: модель В.Леонтьев, продуктивность, матрица, определитель, собственные значения.

Введение. Большую известность приобрела экономическая модель «затраты-выпуск», предложенная В.Леонтьевым [1–4]. В дальнейшем эта модель получила его имя. С математической точки зрения модели В.Леонтьева представляет собой систему линейных неоднородных алгебраических уравнений с технологической матрицей, элементы которой неотрицательны. Модель В.Леонтьева продуктивна, если система уравнений имеет неотрицательные решения. Вопрос продуктивности модели рассмотрен в работе [5], где показано, что модель В.Леонтьева продуктивна тогда и только тогда, когда максимальное собственное значение технологической матрицы принадлежит отрезку [0; 1]. Стохастические модели В.Леонтьева в различных постановках задачи изучались в работах [6, 7].

Целью настоящей статьи является получение явного решения для стохастической модели Леонтьева и предельной теоремы для максимального собственного значения технологической матрицы.

Постановка задачи и основные результаты. Рассмотрим модель Леонтьева

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = y_i, \quad i = 1, ..., n, \tag{1}$$

где x_i – валовый выпуск продукции i-ым предприятием за определенный срок, y_i – спрос на эту продукцию за тот же срок, a_{ij} – количество единиц i-го продукта, которое необходимо затратить на производство единицы j-го продукта и $A = (a_{ij})$ – технологическая матрица размера $n \times n$. Как уже говорилось, модель В.Леонтьева продуктивна, если система линейных уравнений (1) имеет неотрицательные решения [5].

Пусть $\{\Omega, f, P\}$ – полное вероятностное пространство, на котором задана последовательность серий случайных величин

$$\begin{array}{l} \xi_{11} \\ \xi_{12},\ \xi_{22} \\ \vdots \\ \xi_{1n},\ \xi_{2n},\ \ldots,\ \xi_{nn}. \end{array}$$

Будем предполагать, что в каждой из серий ξ_{jn} $(j = 1, ..., n,\ n \ge 1)$ случайные величины независимы и имеют плотность распределения

$$f_n(x) = \begin{cases} (m+1) n^{\alpha(m+1)} x^m, & x \in (0, n^{-\alpha}) \\ 0, & x \notin (0, n^{-\alpha}) \end{cases},$$

где $m \ge 0$ и $\alpha \ge 1/2$, а элементы технологической матрицы A имеют вид

$$a_{ij} = \xi_{in} \xi_{jn} \quad (i, j = 1, ..., n). \tag{2}$$

В дальнейшем индекс n у случайных величин ξ_{jn} будем опускать.

Теорема 1. Пусть λ_n – максимальное собственное значение технологической матрицы A. Тогда с вероятностью 1

$$\lambda_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 .$$

Доказательство. Обозначим

$$D(\lambda)=\det(A-\lambda E)$$

характеристический многочлен матрицы A

$$A(p_1, p_2, ..., p_k)=\begin{vmatrix} a_{p_1p_1} & a_{p_1p_2} & \cdots & a_{p_1p_k} \\ a_{p_2p_1} & a_{p_2p_2} & \cdots & a_{p_2p_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p_kp_1} & a_{p_k} & \cdots & a_{p_kp_k} \end{vmatrix} \quad (k=1, ..., n),$$

где E – единичная матрица размера $n\times n$.

Из [8] следует, что

$$D(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}(-\lambda)^{n-k}S_k, \quad S_0=1, \quad S_k=\frac{1}{k!}\sum_{p_1=1}^{n}\sum_{p_2=1}^{n}...\sum_{p_k=1}^{n}A(p_1, p_2, ..., p_k).$$

Принимая во внимание вид a_{ij} (2), видим, что

$$S_1=\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2 .$$

Вынося из первого столбца определителя $A(p_1, p_2, ..., p_k)$ величину ξ_{p_1}, из второго – ξ_{p_2} и из k-го – ξ_{p_k}, получим

$$A(p_1, p_2, ..., p_k)=\prod_{j=1}^{k}\xi_{p_j}\begin{vmatrix} \xi_{p_1} & \xi_{p_2} & \cdots & \xi_{p_k} \\ \xi_{p_1} & \xi_{p_2} & \cdots & \xi_{p_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{p_1} & \xi_{p_2} & \cdots & \xi_{p_k} \end{vmatrix}=0 \quad (k=2, ..., n).$$

В результате получим характеристическое уравнение для матрицы A

$$(-\lambda)^n+(-\lambda)^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2=0,$$

корни которого есть $\lambda_n=\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2$ и ноль корень кратности $n-1$.

Следствие. Рассмотренная модель В.Леонтьева с вероятностью 1 продуктивна. Действительно, по определению случайных величин ξ_j

$$p\left\{0<\xi_j<n^{-\alpha}\right\}=1.$$

Тогда

$$p\left\{0<\xi_j^2<n^{-2\alpha}\right\}=1$$

и с вероятностью 1

$$\lambda_n\in\left(0, n^{1-2\alpha}\right).$$

Так как $\alpha\geq 1/2$, то $\lambda_n\in(0, 1)$ и рассмотренная модель В.Леонтьева с вероятностью 1 продуктивна.

Запишем систему (1) с учетом выражений (2) следующим образом:

$$x_i-\xi_i\sum_{j=1}^{n}\xi_jx_j=y_i \quad (i=1, ..., n). \tag{3}$$

Теорема 2. С вероятностью 1 система уравнений (3) имеет решение

$$x_i=y_i+\frac{\xi_i\mu_n}{1-\lambda_n} \quad (i=1, ..., n), \quad \mu_n=\sum_{j=1}^{n}\xi_jy_j . \tag{4}$$

Формула (4) показывает очивидный экономический факт – каждое предприятие должно производить столько продукции, чтобы удовлетворить спрос и потребность других предприятий для производства своей продукции.

Доказательство. Если показать, что (4) удовлетворяет (3), то в силу единственности решения (3) утверждение будет доказано. Представляя (4) в (3), получим

$$y_i + \frac{\xi_i \mu_n}{1-\lambda_n} - \xi_i \sum_{j=1}^{n} \xi_j \left(y_j + \frac{\xi_j \mu_n}{1-\lambda_n} \right) = y_i + \frac{\xi_i \mu_n}{1-\lambda_n} - \frac{\xi_i}{1-\lambda_n}\left(\mu_n \left(1-\lambda_n\right) + \lambda_n \mu_n \right) = y_i .$$

Теорема 3. В смысле сходимости по вероятности справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lambda_n - M\lambda_n \right) = 0 .$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда на основании неравенства Чебышева [9] получим

$$P\left\{ \left| \lambda_n - M\lambda_n \right| > \varepsilon \right\} \le \frac{D\lambda_n}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{n} D\xi_j^2 . \qquad (5)$$

Далее

$$M\xi_j^2 = \frac{m+1}{m+3} n^{-2\alpha} , \quad M\xi_j^4 = \frac{m+1}{m+5} n^{-4\alpha} .$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} D\xi_j = \left(\frac{m+1}{m+5} - \left(\frac{m+1}{m+3} \right)^2 \right) \lim_{n\to\infty} n^{-3\alpha} = 0 ,$$

что с учетом (5) доказывает теорему.

Следствие. Если $\alpha = 1/2$, то

$$M\lambda_n = \frac{m+1}{m+3}, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \frac{m+1}{m+3} .$$

РЕЗЮМЕ

У роботі досліджується питання продуктивності моделі В.Леонтьева. Продуктивність моделі залежить від максимального власного значення технологічної матриці. Використовуючи класичні методи теорії матриць, лінійної алгебри і теорії вірогідності, доведено продуктивність моделі, отримано розв'язок цієї моделі і вивчена гранична поведінка максимального власного значення.

Ключові слова: модель В.Леонт'ева, продуктивність, матриця, визначник, власне значення.

SUMMARY

The article considers the productivity of the W. Leontief model. The question of the productivity of this model lies in the study of maximum of its eigenvalue of the technological matrix. Using the classical methods of the matrix theory, linear algebra and the theory of probability we proved the productivity of the proposed matrix, got the evident solution of this model and studied the limited behavior of the maximum eigenvalue.

Keywords: W.Leontief model, productivity, matrix, determinant, eigenvalue.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Leontief W.W. The Structure of the American Economy, 1919-1929. An empirical Application of Equilibrium Analysis / W.W. Leontief. – Cambridge: Harvard University Press, 1941. – 181 p.
2. Leontief W.W. Input-output economies / W.W. Leontief. – Oxford: Oxford University Press, 1986. – 436 p.
3. Леонтьев В.В. Экономическое эссе / В.В. Леонтьев. – М.: Политическая литература, 1990. – 267 с.
4. Леонтьев В.В. Исследование структуры американской экономики: Теоретический и эмпирический анализ по схеме: затраты-выпуск / В.В. Леонтьев. – М.: Госстатиздат, 1958. – 639 с.
5. Колемаев В.А. Математическая экономика / В.А. Колемаев. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 240 с.
6. Гирко В.Л. Случайные матрицы / В.Л.Гирко. – К.: Вища школа, 1975. – С. 448.
7. Ермольцев Ю.М. Стахостические модели и методы в экономическом планировании / Ю.М. Ермольцев, А.И. Ястремский. – М.: Наука, 1979. – 256 с.
8. Смирнов В.И. Курс высшей математики / В.И.Смирнов. – М.: Наука, 1967. – Т. 3, Ч. 1. – 324 с.
9. Гихман И.И. Теория вероятностей и математическая статистика / И.И. Гихман, А.В. Скороход, М.И. Ядренко // К.: Вища школа, 1979. – 408 с.

Поступила в редакцию 27.09.2013 г.