УДК 531.38

ПРЕЦЕССИОННЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ

А.А. Возняк[*], *Г.А. Котов*[**]
[*]*Донецкий национальный университет экономики и торговли им. М. Туган-Барановского, г. Донецк*
[**]*Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, г. Макеевка*

Рассмотрены условия существования полурегулярных прецессий первого типа гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. В случае переменного гиростатического момента построены новые решения уравнений движения гиростата.

Ключевые слова: гиростат, потенциальные и гироскопические силы, прецессии, решения уравнений.

Введение. Прецессионные движения гиростата занимают особое место в динамике систем связанных твердых тел [1], так как они являются характерными режимами многих технических конструкций. Достаточно полно они изучены в случае, когда гиростатический момент постоянен (см. обзоры [1–3]). Это связано с тем, что при постоянном гиростатическом моменте уравнения движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [4] допускают три первых интеграла. Данное свойство позволяет получить условия существования прецессионных движений в виде алгебраической системы на параметры. Когда гиростатический момент зависит от времени, уравнения движения гиростата допускают только два первых интеграла и условия существования прецессий можно свести к условиям существования решений некоторых дифференциальных уравнений [5–8]. Полурегулярные прецессии неавтономного гиростата исследованы в работах [8, 9]. Для динамики гиростата они представляют интерес, так как многие случаи полурегулярных прецессий не имеют аналогов при постоянном гиростатическом моменте.

В данной статье продолжено исследование полурегулярных прецессий первого типа, начатое в [9]. Получены новые условия существования уравнений движения и показана действительность соответствующих им решений.

Постановка задачи. Запишем уравнения движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил [4–6]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} - L(t)\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega}\times\left(B\mathbf{v} - \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}\right) + \mathbf{v}\times\left(C\mathbf{v} - \mathbf{s}\right), \tag{1}$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\lambda}(t) = L(t). \tag{2}$$

В уравнениях (1), (2) обозначено: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела-носителя; $\mathbf{v} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции гиростата; $L(t)$ – проекция момента сил, действующих со стороны тела-носителя на ось вращения носимого тела; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – единичный вектор направления гиростатического момента $\lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$, где $\lambda(t)$ – дифференцируемая функция времени t; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ - вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ - постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{v}$, $\lambda(t)$ обозначает производную по времени t.

Уравнения (1), (2) имеют два первых интеграла:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 1, \; \left(A\boldsymbol{\omega} + \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}\right)\cdot\mathbf{v} - \frac{1}{2}\left(B\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) = k, \tag{3}$$

где k – произвольная постоянная.

Рассмотрим полурегулярные прецессии первого типа относительно вектора $\mathbf{v}$ [1]. Поскольку они характеризуются условиями постоянства угла между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{v}$ и скорости прецессии, то имеют место соотношения:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = a_0, \; \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}(t)\mathbf{a} + m\mathbf{v}, \tag{4}$$
$$\mathbf{v} = \left(a_0'\sin\varphi, a_0'\cos\varphi, a_0\right), \; a_0 = \cos\theta_0, \; a_0' = \sin\theta_0, \; \theta_0 = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{v}),$$

где $\mathbf{a}$ – единичный вектор, неизменный в теле-носителе, m – постоянная, φ – новая переменная. Подвижную систему координат свяжем с вектором $\mathbf{a}$ таким образом, чтобы $\mathbf{a} = (0,0,1)$. Когда выполнены равенства (4), геометрический интеграл из (3) и уравнение Пуассона из (2) становятся тождествами.

Подставим в (1) выражения для $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}$ из системы (4), значение $L(t)$ – из (2) и запишем скалярные уравнения, вытекающие из полученного уравнения. Так как выбором подвижной системы координат можно добиться равенства $\alpha_2 = 0$, то имеем:

$$\alpha_3\dot{\lambda}(t) + A_{33}\ddot{\varphi} - a_0'\alpha_1 m\lambda(t)\cos\varphi + L_2(\varphi) = 0,$$

$$N_1(\varphi)\dot{\lambda}(t) + a_0'\alpha_1\dot{\varphi}\lambda(t)\cos\varphi + M_1(\varphi)\ddot{\varphi} + M_1'(\varphi)\dot{\varphi}^2 - M_2'(\varphi)\dot{\varphi} = 0, \tag{5}$$

$$a_0'\alpha_1\dot{\lambda}(t)\cos\varphi - a_0'\alpha_1\lambda(t)\dot{\varphi}\sin\varphi + M_1'(\varphi)\ddot{\varphi} - Q_1(\varphi)\dot{\varphi}^2 + Q_2(\varphi)\dot{\varphi} + R_2(\varphi) - ma_0'\lambda(t)R_1(\varphi) = 0,$$

где введены обозначения:

$$M_1(\varphi) = A_1\cos\varphi + A_1'\sin\varphi + A_0,\ \ M_1'(\varphi) = A_1'\cos\varphi - A_1\sin\varphi,\ \ Q_1(\varphi) = A_1\cos\varphi + A_1'\sin\varphi,$$

$$M_2(\varphi) = \frac{1}{2}B_2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}B_2'\sin 2\varphi + a_0B_1\cos\varphi + a_0B_1'\sin\varphi + k_0,\ \ N_1(\varphi) = a_0'\alpha_1\sin\varphi + a_0\alpha_3,$$

$$M_2'(\varphi) = -B_2\sin 2\varphi + B_2'\cos 2\varphi - a_0B_1\sin\varphi + a_0B_1'\cos\varphi,\ \ R_1(\varphi) = a_0\alpha_1\sin\varphi - a_0'\alpha_3, \tag{6}$$

$$L_2(\varphi) = C_2'\cos 2\varphi - C_2\sin 2\varphi - \kappa_1'\cos\varphi + \kappa_1\sin\varphi,$$

$$Q_2(\varphi) = B_2\cos 2\varphi + B_2'\sin 2\varphi + a_0B_1\cos\varphi + a_0B_1'\sin\varphi - B_0,$$

$$R_2(\varphi) = a_0C_2\cos 2\varphi + a_0C_2'\sin 2\varphi + \delta_1\cos\varphi + \delta_1'\sin\varphi + \delta_0,$$

$$A_1 = a_0'A_{23},\ A_1' = a_0'A_{13},\ A_0 = a_0A_{33}\ \ B_2 = \frac{a_0'^2}{2}\left(B_{22}^* - B_{11}^*\right),\ B_2' = a_0'^2B_{12}^*,\ B_1 = a_0'B_{23}^*,\ B_1' = a_0'B_{13}^*,$$

$$B_0 = -\frac{a_0'^2}{2}\left(B_{22}^* + B_{11}^*\right),\ C_2 = \frac{a_0'^2}{2}\left(C_{22}^* - C_{11}^*\right),\ C_2' = a_0'^2C_{12}^*,\ \kappa_1 = a_0'\left(s_2 - a_0C_{23}^*\right),$$

$$\kappa_1' = a_0'\left(s_1 - a_0C_{13}^*\right),\ \delta_1 = a_0'\left(\left(2a_0^2 - 1\right)C_{23}^* - a_0s_2\right),\ \delta_1' = a_0'\left(\left(2a_0^2 - 1\right)C_{13}^* - a_0s_1\right), \tag{7}$$

$$\delta_0 = \frac{a_0'^2}{2}\left[2s_3 + a_0\left(C_{11}^* + C_{22}^* - 2C_{33}^*\right)\right],\ k_0 = k - \frac{1}{2}m\cdot sp(A) + \frac{1}{4}\left[a_0'^2\left(B_{11}^* + B_{22}^*\right) + 2a_0^2B_{33}^*\right].$$

В соотношения (7) входят элементы матриц B^* и C^*, определенных следующим образом: $B^* = m\,\mathrm{sp}(A)E - 2mA + B$, $C^* = C + mB - m^2A$, E – единичная матрица, $\mathrm{sp}(A)$ – след матрицы A.

Из интеграла моментов найдем $\lambda(t)$ и $\dot{\lambda}(t)$:

$$\lambda(t) = \frac{1}{N_1(\varphi)}\left(M_2(\varphi) - M_1(\varphi)\dot{\varphi}\right),\ \ \dot{\lambda}(t) = \frac{1}{N_1^2(\varphi)}\left(-M_1(\varphi)N_1(\varphi)\ddot{\varphi} + P_1(\varphi)\dot{\varphi}^2 + M_3(\varphi)\dot{\varphi}\right). \tag{8}$$

Здесь обозначено:

$$P_1(\varphi) = a_0\alpha_3A_1\sin\varphi + a_0\left(a_0'\alpha_1A_{33} - \alpha_3A_1'\right)\cos\varphi + a_0'\alpha_1A_1,$$

$$\begin{aligned} M_3(\varphi) = {} & \frac{1}{4}a_0'\alpha_1B_2\cos 3\varphi + \frac{1}{4}a_0'\alpha_1B_2'\sin 3\varphi + a_0\alpha_3B_2'\cos 2\varphi - a_0\alpha_3B_2\sin 2\varphi + \\ & + \left(a_0^2\alpha_3B_1' - \frac{3}{4}a_0'\alpha_1B_2 - a_0'\alpha_1k_0\right)\cos\varphi - \left(a_0^2\alpha_3B_1 + \frac{3}{4}a_0'\alpha_1B_2'\right)\sin\varphi - a_0a_0'\alpha_1B_1. \end{aligned} \tag{9}$$

Подставим выражения (8) в уравнения (5). В силу того, что второе уравнение системы (5) становится тождеством, то имеем два уравнения:

$$N_1(\varphi)D_1(\varphi)\ddot{\varphi} + \alpha_3P_1(\varphi)\dot{\varphi}^2 + L_3(\varphi)\dot{\varphi} - N_1(\varphi)R_3(\varphi) = 0, \tag{10}$$

$$N_1(\varphi)P_1(\varphi)\ddot{\varphi} - G_1(\varphi)\dot{\varphi}^2 - H_3(\varphi)\dot{\varphi} - N_1(\varphi)F_3(\varphi) = 0, \tag{11}$$

где с учетом обозначений (6) и (9)

$$D_1(\varphi) = A_{33}N_1(\varphi) - \alpha_3M_1(\varphi) = \left(a_0'\alpha_1A_{33} - \alpha_3A_1'\right)\sin\varphi - \alpha_3A_1\cos\varphi,$$

$$\begin{aligned} G_1(\varphi) = {} & a_0'\alpha_1P_1(\varphi)\cos\varphi + a_0'\alpha_1N_1(\varphi)M_1(\varphi)\sin\varphi - Q_1(\varphi)N_1^2(\varphi) = \\ & = a_0^2\alpha_3\left(a_0'\alpha_1A_{33} - \alpha_3A_1'\right)\sin\varphi + A_1\left(a_0'^2\alpha_1^2 - a_0^2\alpha_3^2\right)\cos\varphi + a_0a_0'\alpha_1\left(a_0'\alpha_1A_{33} - \alpha_3A_1'\right), \end{aligned}$$

$$L_3(\varphi) = \alpha_3 M_3(\varphi) + a_0'\alpha_1 M_1(\varphi) N_1(\varphi) m\cos\varphi = \sum_{n=0}^{3} \left(l_n \cos n\varphi + l_n' \sin n\varphi \right),$$

$$l_3 = \frac{a_0'\alpha_1}{4}\left(\alpha_3 B_2 - a_0'\alpha_1 m A_1'\right), \quad l_3' = \frac{a_0'\alpha_1}{4}\left(\alpha_3 B_2' + a_0'\alpha_1 m A_1\right),$$

$$l_2 = \frac{a_0\alpha_3}{2}\left(2\alpha_3 B_2' + a_0'\alpha_1 m A_1\right), \quad l_2' = \frac{1}{2}\left[a_0\alpha_3\left(-2\alpha_3 B_2 + a_0'\alpha_1 m A_1'\right) + a_0'^2\alpha_1^2 m A_0 \right],$$

$$l_1 = \frac{a_0'\alpha_1}{4}\left(-3\alpha_3 B_2 + a_0'\alpha_1 m A_1'\right) + a_0^2\alpha_3^2 B_1' + a_0'\alpha_1\alpha_3\left(a_0 m A_0 - k_0\right),$$

$$l_1' = \frac{a_0'\alpha_1}{4}\left(-3\alpha_3 B_2' + a_0'\alpha_1 m A_1\right) - a_0^2\alpha_3^2 B_1, \quad l_0 = \frac{a_0 a_0'\alpha_1\alpha_3}{2}\left(m A_1 - 2B_2\right);$$

$$R_3(\varphi) = a_0'\alpha_1 M_2(\varphi) m\cos\varphi - L_2(\varphi) N_1(\varphi) = \sum_{n=0}^{3} \left(r_n \cos n\varphi + r_n' \sin n\varphi \right),$$

$$r_0 = \frac{a_0'\alpha_1}{2}\left(a_0 m B_1 - \kappa_1\right), \quad r_3 = \frac{a_0'\alpha_1}{4}\left(m B_2 - 2C_2\right), \quad r_3' = \frac{a_0'\alpha_1}{4}\left(m B_2' - 2C_2'\right),$$

$$r_2 = \frac{a_0'\alpha_1}{2}\left(a_0 m B_1 + \kappa_1\right) - a_0\alpha_3 C_2', \quad r_2' = \frac{a_0'\alpha_1}{2}\left(a_0 m B_1' + \kappa_1'\right) + a_0\alpha_3 C_2,$$

$$r_1 = \frac{a_0'\alpha_1}{4}\left(m B_2 + 2C_2\right) + a_0\alpha_3\kappa_1' + a_0'\alpha_1 m k_0, \quad r_1' = \frac{a_0'\alpha_1}{4}\left(m B_2' + 2C_2'\right) - a_0\alpha_3\kappa_1;$$

$$H_3(\varphi) = a_0'\alpha_1 M_3(\varphi)\cos\varphi - a_0'\alpha_1 N_1(\varphi) M_2(\varphi)\sin\varphi + Q_2(\varphi) N_1^2(\varphi) +$$

$$+ a_0' m R_1(\varphi) N_1(\varphi) M_1(\varphi) == \sum_{n=0}^{3} \left(h_n \cos n\varphi + h_n' \sin n\varphi \right),$$

$$h_3 = -\frac{a_0 a_0'\alpha_1}{4}\left(\alpha_3 B_2 + a_0'\alpha_1 m A_1\right), \quad h_3' = \frac{a_0 a_0'\alpha_1}{4}\left(\alpha_3 B_2' - a_0'\alpha_1 m A_1'\right),$$

$$h_2 = a_0^2\alpha_3^2 B_2 + \frac{a_0'\alpha_1\alpha_3 m}{2}\left(a_0'^2 - a_0^2\right) A_1' + \frac{a_0'^2\alpha_1^2}{2}\left(B_0 - a_0 m A_0\right), \; h_2' = a_0^2\alpha_3^2 B_2' - \frac{a_0'\alpha_1\alpha_3 m}{2}\left(a_0'^2 - a_0^2\right) A_1,$$

$$h_1 = a_0 B_1\left(a_0^2\alpha_3^2 - a_0'^2\alpha_1^2\right) + \frac{5}{4} a_0 a_0'\alpha_1\alpha_3 B_2' + \frac{a_0 a_0'^2 m}{4}\left(\alpha_1^2 - 4\alpha_3^2\right) A_1,$$

$$h_1' = a_0^3\alpha_3^2 B_1' + a_0'\alpha_1\alpha_3\left(m\left[a_0^2 - a_0'^2\right] A_0 - a_0\left[k_0 + 2B_0 + \frac{5}{4} B_2 \right] \right) + \frac{a_0 a_0'^2 m}{4}\left(3\alpha_1^2 - 4\alpha_3^2\right) A_1',$$

$$h_0 = a_0' a_0^2 \alpha_1\alpha_3 B_1' + \frac{a_0'\alpha_1\alpha_3 m}{2}\left(a_0^2 - a_0'^2\right) A_1' + \frac{a_0'^2\alpha_1^2}{2}\left(a_0 m A_0 - B_2 - B_0 - 2k_0\right) - a_0\alpha_3^2\left(a_0'^2 m A_0 + a_0 B_0\right);$$

$$F_3(\varphi) = R_2(\varphi) N_1(\varphi) - a_0' m R_1(\varphi) M_2(\varphi) = \sum_{n=0}^{3} \left(f_n \cos n\varphi + f_n' \sin n\varphi \right),$$

$$f_3 = \frac{a_0 a_0'\alpha_1}{4}\left(m B_2' - 2C_2'\right), \quad f_3' = -\frac{a_0 a_0'\alpha_1}{4}\left(m B_2 - 2C_2\right),$$

$$f_2 = \frac{\alpha_3}{2}\left(2a_0^2 C_2 + a_0'^2 m B_2\right) + \frac{a_0'\alpha_1}{2}\left(\delta_1 - a_0^2 m B_1\right), \quad f_2' = \frac{\alpha_3}{2}\left(2a_0^2 C_2' + a_0'^2 m B_2'\right) - \frac{a_0'\alpha_1}{2}\left(\delta_1' - a_0^2 m B_1'\right),$$

$$f_1 = -\frac{a_0 a_0'\alpha_1}{4}\left(m B_2' - 2C_2'\right) + a_0\alpha_3\left(a_0'^2 m B_1 + \delta_1\right),$$

$$f_1' = \frac{a_0 a_0'\alpha_1}{4}\left(m B_2 - 2C_2\right) + a_0\alpha_3\left(a_0'^2 m B_1' + \delta_1'\right) + a_0'\alpha_1\left(\delta_0 - a_0 m k_0\right),$$

$$f_0 = \frac{a_0'\alpha_1}{2}\left(\delta_1 - a_0^2 m B_1'\right) + \alpha_3\left(a_0\delta_0 + a_0'^2 m k_0\right).$$

Таким образом, задача об исследовании полурегулярных прецессий первого типа неавтономного гиростата сводится к изучению решений уравнений (10), (11).

Случай $A_{23}=0$, $\alpha_1 A_{33}-\alpha_3 A_{13}=0$. Ранее [9], уравнения (10) были изучены в случае, когда одно из уравнений становилось тождеством, то есть коэффициенты при $\ddot{\varphi}$, $\dot{\varphi}^2$, $\dot{\varphi}$ и свободный член обращались в нуль для любых значений φ. Здесь рассмотрим вариант, для которого выполняются условия

$$A_{23}=0, \quad \alpha_1 A_{33}-\alpha_3 A_{13}=0. \tag{12}$$

Тогда из (10) вытекает (коэффициенты при $\ddot{\varphi}$ и $\dot{\varphi}^2$ в силу (9), (11), (12) равны нулю):

$$L_3(\varphi)\dot{\varphi}-N_1(\varphi)R_3(\varphi)=0, \tag{13}$$

$$H_3(\varphi)\dot{\varphi}+N_1(\varphi)F_3(\varphi)=0. \tag{14}$$

Из (13) найдем (предполагаем $L_3(\varphi)\neq 0$)

$$\dot{\varphi}=\frac{N_1(\varphi)R_3(\varphi)}{L_3(\varphi)} \tag{15}$$

Подставим (15) в (14). Так как $N_1(\varphi)$ не может быть тождественным нулем в силу постановки задачи, то имеем:

$$H_3(\varphi)R_3(\varphi)+F_3(\varphi)L_3(\varphi)=0 \tag{16}$$

Учитывая в уравнении (16) равенства (12) и обозначения (9), (11) потребуем, чтобы (16) выполнялось для всех φ. Получим следующую систему алгебраических уравнений на параметры задачи:

$$\frac{\alpha_3 A_1'}{A_{33}^3}\Big\{a_0'^2 m A_{33}\left(A_{33}\left(B_2^2-B_2'^2\right)-2A_1'^2 C_2\right)+A_1'\Big[\left(mA_1'^2-B_2A_{33}\right)\left(a_0\kappa_1'+\delta_1'\right)-$$
$$-B_2'A_{33}\left(a_0\kappa_1+\delta_1\right)+B_0A_1'\left(mB_2-2C_2\right)\Big]\Big\}=0,$$

$$\frac{\alpha_3 A_1'}{A_{33}^3}\Big\{2a_0'^2 m A_{33}\left(B_2B_2'A_{33}-A_1'^2C_2'\right)+A_1'\Big[-\left(mA_1'^2-B_2A_{33}\right)\left(a_0\kappa_1+\delta_1\right)-$$
$$-B_2'A_{33}\left(a_0\kappa_1'+\delta_1'\right)+B_0A_1'\left(mB_2'-2C_2'\right)\Big]\Big\}=0,$$

$$\frac{a_0a_0'^2\alpha_3^3 mB_2B_2'}{2}-\frac{\alpha_3^3A_1'}{8A_{33}^3}\Big\{A_0\Big[3\left(mA_1'^2-B_2A_{33}\right)\left(a_0\kappa_1+\delta_1\right)+3B_2'A_{33}\left(a_0\kappa_1'+\delta_1'\right)-$$
$$-a_0'^2mA_{33}\left(B_2B_1-B_2'B_1'\right)+A_1'\left(B_2'C_2+B_2C_2'-2mB_0B_2'\right)\Big]+A_1'\Big[a_0A_1'B_1\left(mB_2-mB_0-2C_2\right)-$$
$$-\left(\kappa_1A_1'-6A_0C_2'\right)\left(B_0+ma_0'^2A_{33}\right)+\delta_0A_{33}B_2'-a_0mA_1'^2C_2'\Big]\Big\}=0,$$

$$\frac{a_0a_0'^2\alpha_3^3m\left(B_2'^2-B_2^2\right)}{4}-\frac{\alpha_3^3A_1'}{8A_{33}^3}\Big\{\left(mA_1'^2-B_2A_{33}\right)\left(3A_0\left(a_0\kappa_1'+\delta_1'\right)+A_1'\delta_0\right)-$$
$$-a_0'^2mA_0A_{33}\left(B_2B_1'+B_2'B_1\right)-3A_0A_{33}B_2'\left(a_0\kappa_1+\delta_1\right)+A_0A_1'\left(B_2'C_2'-B_2C_2+2mB_0B_2\right)+$$
$$+A_1'\Big[a_0A_1'\left(B_1\left(mB_2-2C_2\right)-mB_0B_1'\right)-\left(\kappa_1'A_1'+6A_0C_2\right)\left(B_0+ma_0'^2A_{33}\right)+a_0mA_1'^2C_2\Big]\Big\}=0,$$

$$\frac{a_0^2\alpha_3^3}{4}\Big[2B_2\left(a_0\kappa_1'+\delta_1'\right)+2B_2'\left(a_0\kappa_1+\delta_1\right)+3a_0'^2m\left(B_2B_1'+B_2'B_1\right)\Big]+\frac{\alpha_3^3A_1'}{16A_{33}^3}\Big\{4A_0^2\Big[mB_2^2+B_2C_2-B_2'C_2'+$$
$$+6B_0C_2-mB_2B_0-mB_2'^2+B_1\left(a_0\kappa_1+\delta_1\right)-\left(B_1'+3mA_1'\right)\left(a_0\kappa_1'+\delta_1'\right)+6ma_0'^2A_{33}C_2\Big]-A_1'^2\Big[4a_0\kappa_1B_1-$$
$$-2C_2\left(3B_0+2B_2+4k_0\right)\Big]+mA_1'^2\Big[6A_{33}C_2\left(a_0'^2-2a_0^2\right)-B_2\left(2B_2+B_0+4k_0\right)-4a_0^2B_1^2-12\delta_0A_0+$$
$$+4B_0k_0-3A_1'\left(a_0\kappa_1'+\delta_1'\right)\Big]+3A_{33}^2\Big[4a_0\delta_0B_2-a_0'^2m\left(B_2^2-B_2'^2-4a_0\kappa_1'A_1'\right)\Big]+A_1'A_{33}\Big[B_2'\left(3\delta_1+7a_0\kappa_1\right)+$$
$$+a_0\kappa_1'\left(5B_2+12B_0+4k_0\right)+\delta_1'\left(4k_0+5B_2\right)+4a_0^2\left(4B_1C_2'-2B_1'C_2+m\left(2B_0B_1'+B_2B_1'-B_2'B_1\right)\right)\Big]\Big\}=0,$$

$$\begin{aligned}
&\frac{a_0^2\alpha_3^3}{4}\Big[2B_2'\left(a_0\kappa_1'+\delta_1'\right)-2B_2\left(a_0\kappa_1+\delta_1\right)+3a_0'^2m\left(B_2'B_1'-B_2B_1\right)\Big]+\frac{\alpha_3^3A_1'}{16A_{33}^3}\Big\{4A_0^2\Big[B_2'\left(C_2+2mB_2-mB_0\right)+\\
&+C_2'\Big(B_2+6B_0+6ma_0'^2A_{33}\Big)+B_1\left(a_0\kappa_1'+\delta_1'\right)+\left(B_1'+3mA_1'\right)\left(a_0\kappa_1+\delta_1\right)\Big]+A_1'^2\Big[2C_2'\left(3B_0+2B_2+4k_0\right)-\\
&-4a_0\kappa_1'B_1\Big]+6A_{33}^2\Big[2a_0\delta_0B_2'-a_0'^2m\left(B_2B_2'+2a_0\kappa_1A_1'\right)\Big]+mA_1'^2\Big[6A_{33}C_2'\Big(a_0'^2-2a_0^2\Big)-B_2'\left(2B_2+B_0+4k_0\right)-\\
&-4a_0^2B_1B'\Big]-A_1'A_{33}\Big[a_0\kappa_1\left(7B_2+12B_0+4k_0\right)+4a_0^2\Big(4B_1C_2+2B_1'C_2'-m\left(B_2B_1+B_2'B_1'-2B_0B_1\right)\Big)+\\
&+\delta_1\left(4k_0+3B_2\right)-5B_2'\left(a_0\kappa_1'+\delta_1'\right)\Big]+mA_1'^3\left(5a_0\kappa_1+\delta_1\right)\Big\}=0,
\end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha_3^3a_0}{2}\Big[2a_0\left(B_2'\delta_0+a_0C_2'B_0\right)+a_0^2\Big(B_1\left(a_0\kappa_1'+\delta_1'\right)+B_1'\left(a_0\kappa_1+\delta_1\right)\Big)+2ma_0'^2\Big(a_0^2B_1B_1'+B_2'k_0+a_0^2A_{33}C_2'\Big)\Big]-\\
&-\frac{\alpha_3^3A_1'}{4A_{33}^3}\Big\{a_0A_{33}^2\Big[ma_0'^2\left(3B_2B_1-2B_2'B_1'+2k_0B_1\right)+6a_0^2\left(C_2B_1+C_2'B_1'\right)+2a_0^2m\left(B_2'B_1'-2B_2B_1+B_0B_1\right)+\\
&+6mA_1'C_2'\Big(a_0^2-a_0'^2\Big)+\left(B_2+2k_0\right)\left(a_0\kappa_1+\delta_1\right)-2B_2'\left(a_0\kappa_1'+2\delta_1'\right)+2a_0\Big(\kappa_1\left(3B_0+2B_2\right)-B_1\delta_0\Big)\Big]+\\
&+A_1'^2\Big[\left(\kappa_1+2ma_0B_1\right)\left(B_2+2k_0\right)+2\kappa_1\Big(B_0+mA_{33}\Big(a_0'^2-3a_0^2\Big)\Big)\Big]+A_1'A_{33}\Big[a_0\left(2B_2'C_2-5B_2C_2'\right)-2a_0\delta_1'B_1-\\
&-6a_0C_2\left(B_0+k_0\right)-2a_0mB_2B_2'+2a_0^2\left(B_1\kappa_1'-B_1'\kappa_1\right)-2\delta_0B_2'\Big]+2a_0m\Big[A_1'^3C_2'+a_0A_{33}^3\Big(\kappa_1\Big(3a_0'^2-a_0^2\Big)-a_0\delta_1\Big)\Big]\Big\}=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{a_0\alpha_3^3}{2}\Big[a_0^2\Big(B_1'\left(a_0\kappa_1'+\delta_1'\right)-B_1\left(a_0\kappa_1+\delta_1\right)\Big)-2a_0\left(a_0B_0C_2+\delta_0B_2\right)-ma_0'^2\Big(2B_2k_0+2a_0^2A_{33}C_2+a_0^2\Big(B_1^2-B_1'^2\Big)\Big)\Big]-\\
&-\frac{\alpha_3^3A_1'}{4A_{33}^3}\Big\{a_0A_{33}^2\Big[ma_0'^2\left(2B_1'k_0+3B_2'B_1+2B_2B_1'\right)+6a_0^2\left(B_1C_2'-B_1'C_2\right)+2a_0^2m\left(B_1'B_0-B_2B_1'-2B_2'B_1\right)+\\
&+6mA_1'C_2\Big(a_0'^2-a_0^2\Big)+2\left(2B_2+k_0\right)\left(a_0\kappa_1'+\delta_1'\right)+B_2'\left(5a_0\kappa_1+\delta_1\right)-2a_0\delta_0\left(B_1'+3mA_1'\right)+2a_0\kappa_1'\left(3B_0-B_2\right)\Big]+\\
&+A_1'^2\Big[\left(B_2+B_0+2k_0\right)\left(a_0mB_1'+\kappa_1'\right)+mA_{33}\kappa_1'\Big(a_0'^2-3a_0^2\Big)+a_0m\left(B_2'B_1-3A_{33}\delta_1'\right)\Big]+A_1'A_{33}\Big[2\delta_0\left(B_2+k_0\right)-\\
&-2a_0^3m\Big(B_1^2+B_1'^2\Big)-2a_0^2\left(B_1'\kappa_1'+B_1\kappa_1\right)+6a_0C_2\left(B_2+B_0+k_0\right)+a_0\left(B_2'C_2'-2B_2C_2\right)-2a_0mB_2'^2+4a_0mk_0B_0+\\
&+2a_0\delta_1B_1\Big]-m\Big[A_1'^3\left(a_0C_2+\delta_0\right)+2a_0^2A_{33}^3\Big(a_0^2\kappa_1'+a_0\delta_1'-3a_0'^2\kappa_1'\Big)\Big]\Big\}=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{a_0^2\alpha_3^3}{4}\Big[a_0'^2m\Big(B_1'\left(B_2-4k_0\right)-B_2'B_1\Big)-2B_2\left(a_0\kappa_1'-\delta_1'\right)+2B_2'\left(a_0\kappa_1-\delta_1\right)+4a_0^2B_1C_2'-4a_0B_1'\left(a_0C_2+\delta_0\right)+\\
&+4a_0\kappa_1'\Big(B_0+a_0'^2mA_{33}\Big)\Big]+\frac{\alpha_3^3A_1'}{8A_{33}^3}\Big\{A_{33}^2\Big[a_0'^2m\Big(B_2^2+B_2'^2+8a_0^2B_1^2+8k_0\left(B_2+k_0\right)\Big)+8a_0^2mk_0\left(B_0-B_2\right)+\\
&+2a_0^2\Big(B_1\left(a_0\kappa_1+5\delta_1\right)-B_1'\left(5a_0\kappa_1'+\delta_1'\right)+3\left(B_2C_2+B_2'C_2'\right)\Big)-2a_0^2m\Big(B_2^2+B_2'^2-B_2B_0+4a_0^2B_1^2+3A_1'\delta_1'\Big)+\\
&+2a_0\Big(\delta_0\left(4k_0+5B_2\right)+2a_0C_2\left(2k_0+3B_0\right)+3mA_1'\kappa_1'\Big(a_0'^2-a_0^2\Big)\Big)\Big]+A_1'^2\Big[2C_2\left(B_2+B_0+2k_0\right)+mB_2^2+\\
&+2mk_0\left(3B_2+B_0+4k_0\right)+2mA_{33}\Big(a_0'^2C_2-3a_0\left(a_0C_2+\delta_0\right)\Big)+2a_0B_1\left(3a_0mB_1-\kappa_1\right)\Big]+A_1'A_{33}\Big[6a_0\kappa_1'B_0+\\
&+2B_2\left(3a_0\kappa_1'+\delta_1'\right)+B_2'\left(3a_0\kappa_1+\delta_1\right)+2k_0\left(5a_0\kappa_1'+\delta_1'\right)-2a_0^2m\Big(B_1'\left(B_2-2B_0+4k_0\right)+5B_2'B_1\Big)-\\
&-4a_0^2B_1'C_2\Big]-m\Big[4a_0^2A_{33}^3\Big(C_2\Big(2a_0^2-3a_0'^2\Big)+2a_0\delta_0\Big)+A_1'^3\left(a_0\kappa_1'+\delta_1'\right)\Big]\Big\}=0,
\end{aligned}$$

$$\frac{a_0^2\alpha_3^3}{4}\Big[a_0'^2 m\big(B_1(B_2+4k_0)+B_2'B_1'\big)-2B_2'(a_0\kappa_1'-\delta_1')-2B_2(a_0\kappa_1-\delta_1)-4a_0^2B_1'C_2'-4a_0B_1(a_0C_2-\delta_0)-$$

$$-4a_0\kappa_1\big(B_0+a_0'^2mA_{33}\big)\Big]+\frac{\alpha_3^3A_1'}{8A_{33}^3}\Big\{A_{33}^2\Big[2a_0'^2m(4B_2'k_0-9a_0\kappa_1A_1')-8a_0^2mB_1B_1'\big(a_0^2-a_0'^2\big)+10a_0\delta_0B_2'+$$

$$+2a_0^2\big(2C_2'(2k_0+3B_0)+9(B_2C_2'-B_2'C_2)+B_1(7\delta_1'-a_0\kappa_1')-B_1'(\delta_1-7a_0\kappa_1)+3mA_1'(3a_0\kappa_1-\delta_1)+$$

$$+mB_2'(B_0-4k_0)\big)\Big]+A_1'^2\Big[2C_2'(B_2+2B_0+2k_0)+mB_2'(B_2+B_0+2k_0)+2mA_{33}C_2'\big(2a_0'^2-9a_0^2\big)+$$

$$+2a_0B_1(a_0mB_1'+\kappa_1')\Big]+A_1'A_{33}\Big[-2a_0\kappa_1(k_0+9B_0)+B_2'(5\delta_1'-3a_0\kappa_1')+2(B_2+k_0)(\delta_1-6a_0\kappa_1)-4a_0^2B_1'C_2'$$

$$+8a_0B_1\delta_0+2a_0^2m\big(B_1(B_2+2B_0-4k_0)-5B_2'B_1'\big)\Big]-m\Big[4a_0^2A_{33}^3C_2'\big(2a_0^2-3a_0'^2\big)-A_1'^3(5a_0\kappa_1-\delta_1)\Big]\Big\}=0,$$

$$\frac{a_0^3\alpha_3^3}{2}\Big[B_1(a_0\kappa_1'-\delta_1')-B_1'(a_0\kappa_1-\delta_1)+2(B_2'C_2-B_2C_2')\Big]+\frac{\alpha_3^3A_1'}{8A_{33}^3}\Big\{A_{33}^2\Big[a_0B_2(7a_0\kappa_1-5\delta_1)+$$

$$+a_0B_2'(7a_0\kappa_1'-5\delta_1')+4a_0^3(B_1C_2+B_1'C_2')+4a_0k_0(a_0\kappa_1-\delta_1)+4a_0^3m\big(B_1(B_2+2k_0-B_0)+B_1'B_2'+3A_1'C_2'\big)-$$

$$-3a_0a_0'^2m\big(B_2B_1+B_2'B_1'+2A_1'C_2'+4k_0B_1\big)+12a_0^2(B_0\kappa_1-B_1\delta_0)\Big]+A_1'^2\Big[\kappa_1(3B_0+2B_2+4k_0)-2a_0B_1C_2+$$

$$+3m\kappa_1A_{33}\big(a_0'^2-3a_0^2\big)-a_0mB_1(B_0+3B_2+8k_0)+3a_0m\delta_1A_{33}\Big]+A_1'A_{33}\Big[B_2'(5a_0C_2-3\delta_0)-$$

$$-a_0\big(C_2'(5B_2+6B_0+4k_0)-2mB_2'(4k_0-B_0)+4B_1(a_0\kappa_1'+\delta_1')+4a_0B_1'(\kappa_1-2ma_0B_1)\big)\Big]+$$

$$+a_0m\Big[3A_1'^3C_2'+4a_0\kappa_1A_{33}^3\big(3a_0'^2-a_0^2\big)+4a_0^2\delta_1A_{33}^3\Big]\Big\}=0.$$

Таким образом, система (17) из одиннадцати уравнений является условием существования полурегулярных прецессий первого типа при условиях (12).

Случай маятниковых движений. Положим в (17) $m=0$, $\alpha_1=0$, $\alpha_3=1$. Тогда из второго равенства в (12) следует $A_{13}=0$. Можно показать, что система (17) допускает следующие решения.

Решение 1.

$$C_{13}=C_{23}=0,\quad B_{22}=-B_{11},\quad s_1=\frac{a_0\big[C_2'(B_2B_1-B_2'B_1')-C_2(B_2'B_1+B_2B_1')\big]}{a_0'\big(B_2'^2+B_2^2\big)},$$

$$s_2=-\frac{a_0\big[C_2(B_2B_1-B_2'B_1')+C_2'(B_2'B_1+B_2B_1')\big]}{a_0'\big(B_2'^2+B_2^2\big)},\quad s_3=-\frac{a_0}{2}(C_{11}+C_{22}-2C_{33}), \tag{18}$$

$$ctg^2\theta_0=\frac{B_{11}^2+B_{12}^2}{B_{13}^2+B_{23}^2}. \tag{19}$$

Угол нутации θ_0, как видно из (19), зависит только от компонент матрицы $B=(B_{ij})$, которая характеризует гироскопические силы. Для того, чтобы привести числовой пример решения положим:

$$B_{11}=b_0,\ B_{12}=2b_0,\ B_{13}=4b_0,\ B_{23}=-b_0,\ C_{11}=c_0,\ C_{22}=3c_0,\ C_{33}=6c_0,\ C_{12}=-3c_0,$$

$$a_0=\frac{\sqrt{110}}{22},\ a_0'=\frac{\sqrt{374}}{22},\ s_1=\frac{27\sqrt{110}}{110}c_0,\ s_2=-\frac{\sqrt{110}}{10}c_0,\ s_3=\frac{2\sqrt{110}}{11}c_0,$$

где b_0 и c_0 – числовые независимые параметры. Из (8) и (15) имеем

$$\dot\varphi=\frac{c_0\big(5610\cos2\varphi+1870\sin2\varphi+27\sqrt{41140}\cos\varphi+11\sqrt{41140}\sin\varphi\big)}{b_0\big(748\sqrt{110}\cos2\varphi+374\sqrt{110}\sin2\varphi+110\sqrt{374}\cos\varphi+440\sqrt{374}\sin\varphi\big)},$$

$$\lambda(t)=\frac{\sqrt{110}}{5}\left(\frac{17b_0}{44}(2\sin2\varphi-\cos2\varphi)+\frac{\sqrt{85}b_0}{22}(4\sin\varphi-\cos\varphi)+k_0-\frac{\sqrt{110}A_{33}}{22}\dot\varphi\right).$$

В отличие от решений [9] в данном случае $\dot{\varphi}$ является рациональной функцией от тригонометрических полиномов второго порядка.

Решение 2. Положим:

$$B_{22} = B_{11}, \quad B_{12} = 0, \quad B_1 = \frac{-2B_{11}\left(C_{13}C_2' + C_{23}C_2\right)}{a_0'\left(C_{13}^2 + C_{23}^2\right)}, \quad B_1' = \frac{-2B_{11}\left(C_{23}C_2' - C_{13}C_2\right)}{a_0'\left(C_{13}^2 + C_{23}^2\right)},$$

$$s_1 = \frac{a_0 a_0'^4 C_{13}\left(C_{23}^2 + C_{13}^2\right) - 2a_0 C_{13}\left(C_2'^2 + C_2^2\right) + 2\delta_0\left(C_{23}C_2' - C_{13}C_2\right)}{a_0'^4\left(C_{13}^2 + C_{23}^2\right)},$$

$$s_2 = \frac{a_0 a_0'^4 C_{23}\left(C_{23}^2 + C_{13}^2\right) - 2a_0 C_{23}\left(C_2'^2 + C_2^2\right) + 2\delta_0\left(C_{13}C_2' + C_{23}C_2\right)}{a_0'^4\left(C_{13}^2 + C_{23}^2\right)}, \tag{20}$$

$$\left(2C_2C_{13}C_{23} - C_2'\left(C_{23}^2 - C_{13}^2\right)\right)\left(a_0'^6\left(C_{13}^2 + C_{23}^2\right) - 4a_0^2\left(C_2'^2 + C_2^2\right)\right) = 0.$$

Если в последнем равенстве системы (20) параметр C_2' удовлетворяет условию $C_2' = \dfrac{2C_2C_{13}C_{23}}{C_{23}^2 - C_{13}^2}$, то соотношение (15) примет вид:

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{B_{11}}\left[a_0'C_{13}\sin\varphi + a_0'C_{23}\cos\varphi + \frac{1}{a_0'^2}\left(a_0C_2 - \delta_0\right)\right] + \frac{2a_0C_2C_{13}^2}{a_0'^2 B_{11}\left(C_{23}^2 - C_{13}^2\right)} \tag{21}$$

Если $a_0'^6\left(C_{13}^2 + C_{23}^2\right) - 4a_0^2\left(C_2'^2 + C_2^2\right) = 0$, то с учетом (7) имеем

$$tg^2\theta_0 = \frac{4C_{12}^2 + \left(C_{22} - C_{11}\right)^2}{C_{13}^2 + C_{23}^2}. \tag{22}$$

В формуле (22), в отличие от (19), угол нутации θ_0 зависит от компонент матрицы $C = \left(C_{ij}\right)$, характеризующей ньютоновское воздействие.

Приведем числовой пример. Пусть

$$B_{11} = B_{22} = 2b_0,\ C_{11} = c_0,\ C_{22} = 2c_0,\ C_{33} = -5c_0,\ C_{12} = c_0,\ C_{13} = -c_0,\ C_{23} = -2c_0,\ s_3 = -2c_0,$$

$$c_0 > 0,\ a_0 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ a_0' = \frac{\sqrt{2}}{2},\ B_{23} = \frac{8b_0}{5},\ B_{13} = \frac{6b_0}{5},\ s_1 = \frac{c_0}{5}\left(6 - 11\sqrt{2}\right),\ s_2 = \frac{c_0}{10}\left(16 - 31\sqrt{2}\right).$$

Если выполнены данные равенства, то из (8) и (15) получим

$$\dot{\varphi} = \frac{c_0\left[5\sqrt{2}\left(\sin 2\varphi - 2\cos 2\varphi\right) + 2\left(12 - 17\sqrt{2}\right)\cos\varphi + 2\left(21\sqrt{2} - 16\right)\sin\varphi\right]}{8b_0\left(3\cos\varphi - 4\sin\varphi\right)},$$

$$\lambda(t) = \sqrt{2}\left(\frac{4}{5}b_0\cos\varphi + \frac{3}{5}b_0\sin\varphi + k_0 - \frac{\sqrt{2}}{2}A_{33}\dot{\varphi}\right).$$

Из этих формул находятся $\varphi(t)$ и $\lambda(t)$. Решение системы (1), (2) определяется формулами (4).

Случай $m = 0$, $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_3 \neq 0$. Вариантом разрешимости уравнений (17) служат равенства:

$$C_{12} = B_{23} = 0, \quad C_{23} = \frac{C_{13}B_2'}{B_2}, \quad C_2 = \frac{a_0'^3 A_{33}\left(B_2C_{13} + B_2'C_{23}\right)}{2A_1'B_0},$$

$$k = \frac{B_2\left[A_{33}\left(B_2^2 + B_2'^2\right) + 2B_2B_1'A_1'\right]}{2A_{33}\left(B_2^2 + B_2'^2\right)} - \frac{1}{4}\left[a_0'^2\left(B_{11} + B_{22}\right) + 2a_0^2 B_{33}\right],$$

$$s_3 = -\frac{a_0}{2}\left(C_{11} + C_{22} - 2C_{33}\right) - \frac{a_0'C_{13}\sqrt{B_2^2 + B_2'^2}\left(B_2 + 2B_0\right)}{2B_2B_0}, \tag{23}$$

$$s_1 = \frac{a_0 a_0'^3 A_{33}^2 \left[C_{13} \left(B_2'^2 - B_2^2 \right) - 2 B_2 B_2' C_{23} \right] + 2 A_1' B_0 \left(a_0 a_0' A_1' C_{13} B_0 - A_{33} B_2 \delta_0 \right)}{2 a_0' A_1'^2 B_0^2},$$

$$s_2 = \frac{a_0 a_0'^3 A_{33}^2 \left[C_{23} \left(B_2'^2 - B_2^2 \right) + 2 B_2 B_2' C_{13} \right] + 2 A_1' B_0 \left(a_0 a_0' A_1' C_{23} B_0 + A_{33} B_2' \delta_0 \right)}{2 a_0' A_1'^2 B_0^2}.$$

$$tg\theta_0 = \frac{A_{33} \sqrt{4 B_{12}^2 + \left(B_{22} - B_{11} \right)^2}}{A_{13} \left(B_{22} - B_{11} \right)} \tag{24}$$

Из соотношений (23), в частности, следует, что ни одна из величин s_i в общем случае не равна нулю. Равенство (24) показывает, что θ_0 зависит от моментов инерции и величин B_{ij}. Числовой пример зададим в виде:

$$A_{33} = \xi,\ A_{13} = 2\xi,\ B_{11} = 2b_0,\ B_{22} = 3b_0,\ B_{33} = 5b_0,\ B_{12} = -b_0,\ B_{13} = 7b_0,\ C_{11} = 5c_0,\ C_{33} = 4c_0,$$

$$C_{13} = 4c_0,\ a_0 = \frac{2}{3},\ a_0' = \frac{\sqrt{5}}{3},\ C_{23} = -8c_0,\ C_{22} = 3c_0,\ s_1 = 2c_0,\ s_2 = \frac{-20}{3}c_0,\ s_3 = -6c_0,\ k = -\frac{1}{9}b_0,$$

где ξ, b_0 и c_0 – числовые независимые параметры. Тогда из формулы (15) найдем

$$\dot{\varphi} = \frac{U_4(\varphi)}{V_3(\varphi)}, \tag{25}$$

где

$$U_4(\varphi) = 4c_0 \left[-25\sin 4\varphi + 10\sqrt{5}\left(2\sin 3\varphi - 3\cos 3\varphi\right) + 10\left(11\sin 2\varphi + 8\cos 2\varphi\right) + 38\sqrt{5}\left(2\sin\varphi - \cos\varphi\right) - 80 \right],$$

$$V_3(\varphi) = 15b_0 \left[\sqrt{5}\left(2\sin 3\varphi - \cos 3\varphi\right) + 4\left(\sin 2\varphi + 2\cos 2\varphi\right) - \sqrt{5}\left(6\sin\varphi - 5\cos\varphi\right) \right], \tag{26}$$

Функцию $\lambda(t)$ определим из первой формулы системы (8)

$$\lambda(t) = \frac{b_0 \left(5\cos 2\varphi - 10\sin 2\varphi + 56\sqrt{5}\sin\varphi + 61 \right)}{24\alpha_3 \left(\sqrt{5}\sin\varphi + 1 \right)} - \frac{\xi\dot{\varphi}}{\alpha_3}. \tag{27}$$

Отличительной особенностью соотношений (25) – (27) является порядок входящих в них тригонометрических многочленов и структура функции (27).

Полурегулярная прецессия первого типа $\dot{\psi} = m \neq 0$. Покажем существование условий разрешимости системы (17) при $m \neq 0$. Для этой цели положим в (17)

$$\alpha_1 = 0,\quad \alpha_3 = 1.$$

Тогда получим систему уравнений:

$$A_{13} = 0,\quad A_{23} = 0,\quad B_2 = 0,\quad B_2' = 0,$$

$$C_{13} = -\frac{2\left(B_0 + a_0'^2 m A_{33}\right)\left(B_1' C_2 - B_1 C_2'\right)}{a_0'^3 \left(B_1^2 + B_1'^2\right)},\quad C_{23} = \frac{2\left(B_0 + a_0'^2 m A_{33}\right)\left(B_1 C_2 + B_1' C_2'\right)}{a_0'^3 \left(B_1^2 + B_1'^2\right)},$$

$$s_1 = \frac{a_0' a_0^2 \left(C_{13} + m B_{13}\right)\left(B_0 + a_0'^2 m A_{33}\right) + B_1'\left(a_0 \delta_0 + a_0'^2 m k_0\right) - a_0^2 \left(B_1 C_2' - B_1' C_2\right)}{a_0 a_0' \left(B_0 + a_0'^2 m A_{33}\right)}, \tag{28}$$

$$s_2 = \frac{a_0' a_0^2 \left(C_{23} + m B_{23}\right)\left(B_0 + a_0'^2 m A_{33}\right) + B_1\left(a_0 \delta_0 + a_0'^2 m k_0\right) - a_0^2 \left(B_1 C_2 + B_1' C_2'\right)}{a_0 a_0' \left(B_0 + a_0'^2 m A_{33}\right)},$$

$$\left(C_2' \left(B_1^2 - B_1'^2 \right) - 2 C_2 B_1 B_1' \right)\left(a_0'^4 m^2 A_{33}^2 + 2 a_0'^2 m A_{33} B_0 - a_0^2 \left(B_1^2 + B_1'^2 \right) + B_0^2 \right) = 0.$$

Числовой пример решения уравнений (28) будем строить для следующего случая:

$$A_{11}=3\xi,\ A_{22}=4\xi,\ A_{33}=5\xi,\ A_{12}=-2\xi,\ B_{11}=b_0,\ B_{22}=7b_0,\ B_{33}=-5b_0,\ B_{12}=-12b_0,$$
$$B_{13}=8b_0,\ B_{23}=5b_0,\ C_{11}=10c_0,\ C_{22}=6c_0,\ C_{33}=8c_0,\ s_3=c_0,\ a_0=\frac{1}{3},\ a_0'=\frac{2\sqrt{2}}{3}. \qquad (29)$$

Пусть $m=3\dfrac{b_0}{\xi}$. Если в последнем равенстве в (28) положить $C_2'=\dfrac{2C_2B_1B_1'}{B_1^2-B_1'^2}$, то, с учетом (8), (15), имеем:

$$C_{12}=\frac{2\left(171b_0^2+80c_0\xi\right)}{39\xi},\quad C_{23}=\frac{20\left(9b_0^2-4c_0\xi\right)}{39\xi},\quad C_{13}=\frac{32\left(9b_0^2-4c_0\xi\right)}{39\xi},$$
$$s_1=\frac{-2\left(456b_0^2+c_0\xi+351b_0k_0\right)}{39\xi},\quad s_2=\frac{-5\left(456b_0^2+c_0\xi+351b_0k_0\right)}{156\xi}, \qquad (30)$$
$$\dot\varphi=\frac{8\sqrt{2}\left(9b_0^2-4c_0\xi\right)\left(5\cos\varphi+8\sin\varphi\right)+61c_0\xi-1980b_0^2-1053b_0k_0}{468b_0},$$
$$\lambda(t)=\frac{4\sqrt{2}\left(10c_0\xi-3b_0^2\right)\left(5\cos\varphi+8\sin\varphi\right)}{117b_0}+\frac{6669b_0k_0-305c_0\xi+9900b_0^2}{468b_0}.$$

Если же в последнем равенстве системы (28) выражение во второй скобке равно нулю, то на основании (7) получим квадратное уравнение на m:

$$a_0'^2\left(A_{22}-A_{11}\right)^2m^2+2a_0'^2B_{11}\left(A_{22}-A_{11}\right)m-a_0^2\left(B_{23}^2+B_{13}^2\right)+a_0'^2B_{11}^2=0,$$

откуда с учетом (29) найдем $m=\left(-1+\dfrac{\sqrt{178}}{4}\right)\dfrac{b_0}{\xi}$. Положим $C_{12}=5c_0$,

$$C_{13}=\frac{\sqrt{178}\left[7b_0^2\left(97-4\sqrt{178}\right)-164\xi c_0\right]}{712\xi},\quad C_{23}=\frac{3\sqrt{178}\left[9b_0^2\left(97-4\sqrt{178}\right)-160\xi c_0\right]}{2848\xi},$$
$$s_2=\frac{\sqrt{178}\left[480\xi c_0-b_0^2\left(12077-164\sqrt{178}\right)+720k_0b_0\left(4-\sqrt{178}\right)\right]}{8544\xi}, \qquad (31)$$
$$s_1=\frac{\sqrt{178}\left[108\xi c_0-5b_0^2\left(745-4\sqrt{178}\right)+288k_0b_0\left(4-\sqrt{178}\right)\right]}{2136\xi}.$$

Зависимость $\varphi(t)$ найдем из (15)

$$\dot\varphi=\frac{U_2(\varphi)}{V_1(\varphi)}, \qquad (32)$$

где

$$U_2(\varphi)=7209\sqrt{2}\left\{4\left[b_0^2\left(97-4\sqrt{178}\right)-20\xi c_0\right]\cos2\varphi+\left[b_0^2\left(97-4\sqrt{178}\right)-32\xi c_0\right]\sin2\varphi\right\}+$$
$$+4\left(2\sqrt{178}-89\right)\left\{\left[11664b_0k_0+81b_0^2\left(17\sqrt{178}+28\right)-68\left(\sqrt{178}+4\right)\xi c_0\right]\cos\varphi+\right. \qquad (33)$$
$$\left.+\left[-2430b_0k_0-27b_0^2\left(8+13\sqrt{178}\right)-20\left(4+\sqrt{178}\right)\xi c_0\right]\sin\varphi\right\},$$
$$V_1(\varphi)=173016\xi b_0\left(8\cos\varphi-5\sin\varphi\right).$$

Функция (8) такова:

$$\lambda(t)=\frac{2\sqrt{2}b_0}{3}\left(5\cos\varphi+8\sin\varphi\right)+3k_0-5\xi\dot\varphi. \qquad (34)$$

Таким образом, в случае $m\neq0$ построено два примера разрешимости условий существования полурегулярных прецессий, которым соответствуют решения (30) и (31)–(34).

Выводы. В статье получены новые классы движений гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил. Они соответствуют маятниковым движениям и полурегулярным прецессиям гиростата, которые характеризуются постоянством скорости прецессии.

РЕЗЮМЕ

Розглянуто умови існування напіврегулярних прецесій першого типа гіростата під дією потенційних і гіроскопічних сил. У випадку змінного гіростатичного моменту побудовано нові розв'язки рівнянь руху гіростата.

Ключові слова: гіростат, потенційні і гіроскопічні сили, прецесії, розв'язки рівнянь.

SUMMARY

The conditions of existence of the first type semi regular gyrostat's precessions under the action of potential and gyroscopic forces are considered. In the case of variable gyrostatic moment the new solutions of gyrostat movement equations are obtained.

Keywords: gyrostat, potential and gyroscopic forces, precessions, solutions of equations.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горр Г.В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел / Г.В. Горр, А.В. Мазнев, Е.К. Щетинина. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.
2. Горр Г.В. Классические задачи динамики твердого тела / Г.В. Горр, Л.В. Кудряшова, Л.А. Степанова. – К.: Наук. Думка, 1978. – 296 с.
3. Горр Г.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г.В. Горр, А.В. Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2012. – 364 с.
4. Yehia H. M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations / H.M. Yehia // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – Vol. 5, No 5. – P. 742-745.
5. Волкова О.С. Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом / О.С. Волкова, И.Н. Гашененко // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42-49.
6. Мазнев А.В. Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил / А.В. Мазнев // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91-104.
7. Мазнев А.В. О прецессии сферического гиростата с переменным гиростатическим моментом в поле силы тяжести / А.В. Мазнев // Вестник Донецкого нац. ун-та. Серия А: Естественные науки. – 2011. – №. 1. – С. 14-18.
8. Мазнев А.В. Прецессионно-изоконические движения второго типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом / А.В. Мазнев, Г.А. Котов // Вестник Донецкого нац. ун-та. Серия А: Естественные науки. – 2012. – № 1. – С. 79-83.
9. Возняк А.А. Полурегулярные прецессии первого типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил / А.А. Возняк // Труды ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2012. – Т. 24. – С. 45-57.

Поступила в редакцию 02.09.2013 г.