МАТЕМАТИКА

УДК 512.56(2-8),519.766.24

Крайнічук Галина

старший викладач кафедри прикладної механіки і комп'ютерних технологій, Донецький національний університет імені Василя Стуса

КЛАСИФІКАЦІЯ БІНАРНИХ КВАЗІГРУПОВИХ ФУНКЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ДОВЖИНИ ЧОТИРИ

У цій статті класифіковано узагальнені функційні рівняння довжини чотири. Встановлено, що з точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує точно 1, 3, 4, 19 узагальнених нетривіальних функційних рівнянь без функційних і предметних сталих функційної довжини один, два, три, чотири відповідно; знайдено їх розв'язки на бінарних оборотних функціях довільної множини. Крім того, подано класифікації квазігрупових тотожностей довжини 2 і 3 та описано відповідні многовиди, які визначаються ними: знайдено приклади квазігруп, які відрізняють один многовид від іншого.

Ключові слова: *група, квазігрупа, лупа, оборотна операція, парастроф, ізотоп, тотожність, функційне рівняння, парастрофно-первинна рівносильність.*

Вступ

Проблема класифікації квазігрупових функційних рівнянь і тотожностей формувалася протягом XX століття. Передумовою виникнення її, як теорії, стали два напрямки розвитку дослідження теорії квазігруп:
1) виникнення все нових і нових тотожностей в різних галузях математики, наприклад в геометрії (тотожності Бола-Муфанг [29], тотожності CH-квазігруп [30] тощо), комбінаторики (тотожності, які визначають ортогональність парастрофів [7, 10, 9]) і т. д.;
2) розв'язання тотожностей, як функційних рівнянь (теорема Глускіна-Хоссу для n-арних груп, теорема Брака-Тойоди для медіальних квазігруп та їх узагальнення Білоусовим на n-арний випадок, теорема про чотири квазігрупи Білоусова для асоціативності [4, 5] тощо).

Згодом останній напрямок узагальнювався і вивчалися узагальнені тотожності, а в подальшому тотожності як функційні рівняння, що відображено в книгах Ацеля [1, 2], Ацеля та Домбра [1], Каннаппана [11] та інших. Тому ці класи задач стали предтечею проблеми побудови теорії функційних рівнянь, частиною якої є класифікація та їх розв'язування. Однією із перших праць класифікації функційних рівнянь є дисертація А. М. Чебана [29], хоча в ній більшість понять не точно визначені, а сформульовані на інтуїтивному рівні. В сучасних працях дано строгі означення для теорії функційних рівняннь (означення функційного рівняння, різних відношень між ними тощо): Коваль [3], Сохацький [1], Крапєж, Сіміч, Тошич та інші [4, 6, 22], Мовсісян [23].

Класифікація функційних рівнянь — це проблема, в рамках якої ставиться задача класифікації мінімальних функційних рівнянь і, як частинний їх випадок, задача класифікації тотожностей, а точніше функційних рівнянь, в яких всі функційні змінні попарно парастрофні. Остання задача в алгебрі має своє тлумачення, а саме як опис многовидів, які є розв'язками відповідних функційних рівнянь. Многовиди, тобто класи квазігруп, що визначаються тотожностями. Методом аналізу тотожностей є розв'язання відповідного функційного рівняння, тобто рівняння, яке отримуємо з даної тотожності заміною кожної появи функційного символу її функційною змінною відповідної арності. Тому вивчення функційних рівнянь над квазігрупами можна розглядати як синтезоване вивчення систем тотожностей в квазігрупах.

У цій статті досліджуються функційні рівняння до довжини 4 на множині оборотних двомісних функцій; встановлюються взаємні зв'язки між розв'язками функційних рівнянь одного класу парастрофної симетрії та класифікації квазігрупових функційних рівнянь і тотожностей довжини 2 і 3 з точністю до парастрофно-первинної рівносильності, враховуючи основний закон парастрофної симетрії.

Метою даної статті є дослідження всіх класів узагальнених бінарних квазігрупових функційних рівнянь довжини чотири з точністю до парастрофно-первинної рівносильності, як наслідок опис тотожностей та відповідних многовидів з точністю до рівносильності та парастрофної рівносильності.

Завдання даного дослідження: класифікувати узагальнені функційні рівняння довжини 4, розв'язати відповідні представники кожного блока розбиття, визначити кількість різних парастрофних многовидів квазігруп та відповідні тотожності довжини 2 та 3.

1. Основні означення та результати

В роботі розглядаються бінарні операції, що визначені на одному й тому ж носієві, яку позначатимемо через Q. Операція f називається *лівооборотною*, якщо довільний її правий зсув є підстановкою базової множини. Інакше кажучи, якщо рівняння $f(x;a)=b$ має єдиний розв'язок для всіх a, b із Q. Розв'язок цього рівняння позначають через ${}^{\ell}f(b;a)$. Очевидно, що ${}^{\ell}f$ є бінарною операцією, яку називають лівим діленням (інколи спряженням) операції f. Так само визначається праве ділення ${}^{r}f$ операції f. Інакше ці операції можна визначити тотожностями

$$f({}^{\ell}f(x;y);y)=x, \qquad {}^{\ell}f(f(x;y);y)=x, \qquad f(x;{}^{r}f(x;y))=y, \qquad {}^{r}f(x;f(x;y))=y. \quad (1)$$

Аналогічно визначається правооборотна операція і праве ділення (спряження) ${}^{r}f$, для якого виконуються третя і четверта рівності із (1).

Функція f називається оборотною або квазігруповою, якщо вона є правооборотною і лівооборотною. При цьому тотожності (1) називаються визначальними або первинними, а групоїд $(Q;f)$ називається квазігрупою.

Функція ${}^{\sigma}f$ називається σ-парастрофом функції f, якщо вона визначається таким співвідношенням:

$${}^{\sigma}f(x_{1\sigma};x_{2\sigma})=x_{3\sigma} \iff f(x_1;x_2)=x_3$$

для будь-якого $\sigma\in S_3:=\{\iota,s,\ell,r,s\ell,sr\}$, де S_3 – симетрична група третього порядку та $s:=(12)$, $\ell:=(13)$, $r:=(23)$.

Якщо операцію позначити через f, а довільний елемент носія позначити через a, то ліва, права та середня трансляції позначатимемо L_a^f, R_a^f та M_a^f відповідно, тобто мають місце такі позначення:

$$L_a^f(x):=f(a;x), \quad R_a^f(x):=f(x;a), \quad M_a^f(x)=y\Leftrightarrow f(x;y)=a. \quad (2)$$

Операції f, g називаються ортогональними ($f\perp g$), якщо система

$$\begin{cases} f(x;y)=a, \\ g(x;y)=b \end{cases}$$

має єдиний розв'язок для всіх $a, b \in Q$.

Нагадаємо, що ліве мнження $\underset{\ell}{\oplus}$ і праве множення $\underset{r}{\oplus}$ бінарних операцій визначається такими рівностями:

$$(g \underset{\ell}{\oplus} h)(x;y) := g(h(x;y);y), \qquad (g \underset{r}{\oplus} h)(x;y) := g(x;h(x;y)).$$

Лема 1. ([6]) *Нехай g, h – оборотні операції, тоді виконуються таі рівності:*

$$g \underset{\ell}{\oplus} h \text{ є оборотною } \Leftrightarrow \ g \perp {}^{\ell}h, \qquad g \underset{r}{\oplus} h \text{ є оборотною } \Leftrightarrow \ g \perp {}^{r}h.$$

Універсальна рівність двох термів

$$(\forall F_1)(\forall F_2)\dots(\forall F_k)(\forall x_1)(\forall x_2)\dots(\forall x_n)(T_1 = T_2) \tag{3}$$

називається *функційним рівнянням на* Q, якщо вона має принаймні одну вільну функційну змінну, інакше вона є висловом і називається *тотожністю*, якщо цей вислів істиний та *протиріччям*, якщо цей вислів хибний.

Функційне рівняння називається: *чистим*, якщо воно не має ні функційних, ні предметних сталих; *узагальненим*, якщо всі функційні змінні попарно різні; *нетривіальним*, якщо воно має розв'язки лише на одноелементній множині; *квазігруповим*, якщо воно розглядається лише на оборотних функціях; *бінарним*, якщо всі функційні змінні є бінарними (двомісними); *квадратичним*, якщо в рівнянні кожна предметна змінна має точно дві появи; *врівноваженим*, якщо кожна предметна змінна має по різні сторони рівняння однакову кількість появ кожної своєї незалежної предметної змінної.

Значення лексикографічної послідовності всіх вільних функційних змінних даного функційного рівняння називається його *розв'язком*, якщо рівняння стає тотожністю після підстановки компонентів розв'язку замість функційних змінних.

Чисте функційне рівняння можна розглядати на кожному носієві, причому на кожному носієві воно має свою множину розв'язків. Розв'язком чистого функційного рівняння є пара: носій і послідовність функцій, що визначена на носієві. Тому всі розв'язки функційного рівняння утворюють алгебру. Клас називається многовидом, якщо він описується тотожностями, тобто в цій термінології — многовид є розв'язком чистого функційного рівняння.

Формула (3) називається *універсальною квазігруповою рівністю*, якщо і функційні змінні, і функційні сталі є квазігруповими операціями.

Первинні квазігрупові гіпер-тотожності — це чисті квазігрупові тотожності (чисті функційні рівняння), які випливають із означення оборотних операцій та їх парастрофів. Для бінарного випадку ці тотожності такі:

$$\begin{array}{ll} {}^{\sigma}({}^{\tau}F) = {}^{\sigma\tau}F, & {}^{s}F(x,y) = F(y,x), \\ {}^{\ell}F(F(x,y),y) = x, & F({}^{\ell}F(x,y),y) = x, \\ {}^{r}F(x,F(x,y)) = y, & F(x,{}^{r}F(x,y)) = y, \\ {}^{s\ell}F(x,F(y,x)) = y, & F({}^{s\ell}F(x,y),x) = y, \\ {}^{sr}F(F(y,x),y) = x, & F(y,{}^{sr}F(x,y)) = x. \end{array} \tag{4}$$

Зауваження 1. *Зауважимо, що переіменувавши предметні змінні у функційному рівнянні, ми отримаємо різні формули, які є записами одного й того ж функційного рівняння, оскільки всі предметні змінні у цих формулах зв'язані кванторами загальності.*

Означення 1. *Кажуть, що два функційні рівняння* рівносильні на носієві*, якщо вони мають одну й ту ж множину розв'язків на даному носієві. Два чистих функційних рівняння називають* рівносильними*, якщо вони рівносильні на кожному носієві, тобто якщо в них один і той же многовид розв'язків.*

Слідуючи Саду [24], операцію назвемо *діагональною*, якщо $f(x;x)$ є підстановкою носія. Бінарну функційну змінну назвемо *діагональною*, якщо вона представляє діагональні операції.

Два функційні рівняння називаються *парастрофно-первинно-рівносильними*, якщо одне з них можна отримати за скінченну кількість таких кроків:
1) застосування гіпер-тотожностей (4) [23];
2) заміна сторін рівняння;
3) переіменування предметних змінних;
4) переіменування функційних змінних.

Для скороченого запису парастрофно-первинну рівносильність позначатимемо знаком $\asymp$.

Два функційні рівняння називаються *діагонально-парастрофними*, якщо одне з них можна отримати за скінченну кількість таких кроків $1)-4)$ та 5) заміна підтерма $F(x;x)$ на підтерм $\delta_F(x)$, якщо F є діагональною функційною змінною і навпаки.

Лема 2. (Р. Коваль [3, с. 54]) *Якщо узагальнені функційні рівняння $\omega = \upsilon$ і $\omega' = \upsilon'$ від n предметних змінних та m функційних змінних є парастрофно-первинно-рівносильними, то існують послідовність перестановок $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ множини $\{1,2,3\}$ та перестановки τ множини $\{1,\dots,m\}$ такі, що для довільної множини Q для довільного розв'язку $(f_1,\dots,f_m)$ рівняння $\omega = \upsilon$ вибірка $({}^{\sigma_{1\tau}}f_{1\tau},\dots,{}^{\sigma_{m\tau}}f_{m\tau})$ є розв'язком рівняння $\omega' = \upsilon'$.*

Лема 3. ([3]) *Кожне функційне рівняння зводиться комутуванням до рівняння, в якому довільне підслово $\upsilon_1 \cdot \upsilon_2$ задовольняє умову $|\upsilon_1| \leqslant |\upsilon_2|$, а підслово t_1t_2, — умову $t_1 \preccurlyeq t_2$, де t_1, t_2 — предметні змінні.*

Узагальнені функційні рівняння від двох функційних змінних на бінарних квазігрупах вивчали та розв'язували, виходячи із застосування, різні автори С. Крстич [22], А. Крапєж [5], В. Д. Білоусов [7], Р. Коваль [3], Ф. М. Сохацький [7] та інші. Зокрема, класифікацією таких рівнянь на квазігрупах займалися Р. Коваль [3] та А. Крапєж [20]. Вони вивчали лише квадратичні функційні рівняння. Р. Коваль в теоремі 2.2.2 (стор. 20 [3]) дала повну класифікацію квадратичних узагальнених функційних рівнянь від двох функційних змінних з точністю до парастрофно-первинної рівносильності та виписала відповідно множини розв'язків отриманих рівнянь (в її дисертації термін "парастрофно-первинна рівносильність" називається "парастрофна рівносильність", а термін "узагальнене рівняння" називається "загальне рівняння").

Узагальнені функційні рівняння від трьох функційних змінних досліджував В. Д. Білоусов [7], зокрема він вивчав рівняння в термах яких немає квадратів і називав такі рівняння мінімальними нетривіальними тотожностями.

Теорема 1. (В. Білоусов [7, с. 7]) *Будь-яка мінімальна нетривіальна тотожність в квазігруповій алгебрі зводиться лише до одного вигляду:*

$$F_1(x; F_2(x; F_3(x; y)))) = y. \tag{5}$$

З огляду на ортогональність квазігруп, в зв'язку з комбінаторними питаннями, які виникли в результаті застосувань, В. Д. Білоусов почав інтуїтивно вивчати функційні рівняння, не визначаючи чітких понять та означень. Питання, яке поставив Білоусов, було вдосконалене та уточнене Ф. М. Сохацьким [7]. Як наслідок, Р. Коваль [3] розглядала узагальнені функційні рівняння на квазігрупах, що мають три появи однієї предметної змінної та дві появи іншої предметної змінної. Всього таких класів узагальнених рівнянь виявилося три.

Узагальнені квадратичні функційні рівняння від чотирьох функційних змінних та трьох предметних змінних досліджувала Р. Коваль [3] та систематизував А. Крапєж [21]. Парастрофно-первинну нерівносильність отриманих рівнянь А. Крапєж встановив за допомогою неізоморфних графів: функційні рівняння парастрофно-первинно рівносильні, якщо відповідні їм 3-зв'язні мультиграфи Крстича з чотирма вершинами та трьома ребрами ізоморфні. Всього таких рівнянь з точністю до парастрофно-первинної рівносильності виявилося точно п'ять. Сформулюємо в термінах функційних рівнянь теорему отриману Р. Коваль та уточнену А. Крапєжем.

Теорема 2. (Р. Коваль [3, с. 20], А. Крапєж [21, с. 269]) *Кожне чисте узагальнене бінарне квазігрупове нетривіальне квадратичне функційне рівняння парастрофно-первинно рівносильне точно одному з рівнянь:*

$$F_1(F_2(x; y); z) = F_3(x; F_4(y; z)), \tag{6}$$

$$F_1(x; x) = F_2(F_3(y; y); F_4(z; z), \tag{7}$$

$$F_1(F_2(x; y); z) = F_3(F_4(x; y); z), \tag{8}$$

$$F_1(x; x) = F_2(F_3(y; z); F_4(y; z)), \tag{9}$$

$$F_1(x; x) = F_2(y; F_3(y; F_4(z; z))). \tag{10}$$

Перше рівняння є відомим узагальненим рівнянням асоціативності, його розв'язав В. Д. Білоусов [5]. Теорема про його розв'язки має назву “теорема про чотири квазігрупи”, яка з повним доведенням опублікована в [4]. Деякі удосконалення в розв'язках отримав Ф. М. Сохацький [27]. Використовуючи методи теорії графів, рівняння (10) знайшов і розв'язав А. Крапєж [21]. Решту рівнянь (7)–(9) знайшла і розв'язала на множині бінаних квазігруп Р. Коваль [12].

2. Класифікація узагальнених рівнянь

В цій частині статті досліджуються чисті узагальнені функційні рівняння до довжини чотири та їх розв'язки на бінарних квазігрупових операціях. Розглянемо таку класифікацію чистих узагальнених нетривіальних бінарних квазігупових функційних рівнянь мінімальної довжини, коли в один блок розбиття попадають рівняння, множини всіх розв'язків яких виразимі одна через другу.

Означення 2. *Якщо незалежна предметна змінна має точні дві появи у рівнянні, то таку предметну змінну назвемо квадратичною.*

Отже, рівняння є квадратичним, якщо кожна предметна змінна є квадратичною.

Означення 3. *Якщо у рівнянні точно одна незалежна предметна змінна має більше двох появ, а інші незалежні предметні змінні – квадратичні, то таке рівняння назвемо майже квадратичним.*

Означення 4. *Якщо у рівнянні жодна предметна змінна не є квадратичною, то таке рівняння назвемо антиквадратичним.*

Наведені нижче означення є уточненням описаних понять у докторській дисертації Ф. М. Сохацького [8, с. 58] та у кандидатській дисертації Р. Ф. Коваль [3, с. 37].

Означення 5. *Під функційною довжиною функційного рівняння розуміємо натуральне число, яке дорівнює кількості всіх функційних змінних у рівнянні, враховуючи повторення всіх функційних змінних, як різні функційні змінні.*

Іншими словами, це сума функційної довжини термів лівої і правої частин функційного рівняння. Наприклад, рівняння узагальненої асоціативності (6) є функційним рівнянням функційної довжини 4, бо кількість всіх функційних змінних у цьому рівнянні дорівнює чотирьом.

Означення 6. *Під предметною довжиною функційного рівняння розуміємо натуральне число, яке дорівнює кількості всіх появ предметних змінних у рівнянні, враховуючи повторення всіх предметних змінних, як різні предметні змінні.*

Точніше, це сума предметної довжини термів лівої і правої частин рівняння. Наприклад, рівняння узагальненої асоціативності (6) є функційним рівнянням предметної довжини 6, бо кількість різних незалежних предметних змінних у цьому рівнянні три, кожна з яких має точно по дві появи.

Означення 7. *Під предметним типом рівняння від k різних незалежних предметних змінних розуміємо послідовність натуральних чисел $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$, де m_i позначає кількість появ у рівнянні i-ї незалежної предметної змінної при їх розташуванні у лексикографічному порядку.*

Нехай Q — довільна множина, тоді пара підстановок (θ, τ) називається трансверсаллю оборотної операції f, яка визначена на Q, якщо для $\forall x \in Q$ виконується рівність $f(x, \theta x) = \tau x$. Операцію f називають допустимою, якщо вона має трансверсаль. Якщо пара (ι, τ) є трансверсаллю для деякої підстановки τ, то таку операцію назвемо діагональною.

Далі в тексті статті всіх доведень і формулювань тверджень, теорем і наслідків замість слів 'функційне рівняння функційної довжини' будемо вживати 'рівняння функційної довжини', замість слів 'функційне рівняння предметної довжини' – 'рівняння предметної довжини' та замість слів 'функційне рівняння предметного типу' – 'рівняння типу', а під поняттям 'узагальнене рівняння' розумітимемо 'чисте узагальнене бінарне квазігрупове нетривіальне функційне рівняння'.

3. Класифікація та розв'язки рівнянь до довжини три

Узагальнені рівняння довжини один, два та три досліджено в статтях [14], [16]. Враховуючи всі введені означення сформулюємо повні теореми про класифікацію таких рівнянь.

Твердження 1. *З точністю до парастрофно-первинної рівносильності узагальнене функційне рівняння функційної довжини 1 точно одне* $F(x;x) = x$ *, розв'язком його є ідемпотентні квазігрупи і тільки вони.*

Теорема 3. ([16]) *З точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує точно 3 узагальнені рівняння функційної довжини* 2*, які мають розподіл на:*
предметний тип $(2;2)$

$$F_1(x;x) = F_2(y;y), \tag{11}$$

$$F_1(x;y) = F_2(x;y); \tag{12}$$

предметний тип $(4;0)$

$$F_1(x;x) = F_2(x;x). \tag{13}$$

Множини всіх розв'язків рівнянь (11) і (12) виписано Р. Коваль [3]. Скориставшись означенням діагоналі, розв'язки рівняння (13) подамо в такому очевидному твердженні.

Твердження 2. *Множиною всіх розв'язків рівняння* (13) *є множина всіх пар квазігрупових операцій, в яких однакові головні діагоналі в їх таблицях Келі.*

Наслідок 1. *Існує точно одне антиквадратичне узагальнене рівняння функційної довжини 2 з точністю до парастрофно-первинної рівносильності, наприклад (13).*

Доведення випливає із теореми 3. та означення 4.. □

Нижче наведені твердження є наслідками з теореми 3. результатів Р. Коваль [3] та А. Крапєжа [5].

Наслідок 2. *Існує точно два квадратичних узагальнених рівнянь функційної довжини 2 з точністю до парастрофно-первинної рівносильності, наприклад* (11), (12).

Наслідок 3. *Існує точно одне квадратичне узагальнене рівняння без квадратів функційної довжини 2 з точністю до парастрофно-первинної рівносильності, наприклад* (12).

Теорема 4. ([16]) *З точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує точно 4 узагальнені рівняння функційної довжини* 3*, які мають розподіл на:*
предметний тип $(3;2)$ *— це рівняння*

$$F_1(x;F_2(x;y)) = F_3(x;y), \tag{14}$$

$$F_1(F_2(x;x);y) = F_3(x;y), \tag{15}$$

$$F_1(F_2(x;x);x) = F_3(y;y); \tag{16}$$

предметний тип $(5;0)$

$$F_1(x;F_2(x;x))) = F_3(x;x). \tag{17}$$

Перше рівняння (14) розв'язане В.Д. Білоусовим [8]. Розв'язування інших трьох функційних рівнянь (15), (16), (17) досліджувала автор [14]. Квазігрупові розв'язки рівнянь (14)–(17) подані в таких твердженнях.

Твердження 3. *Трійка оборотних бінарних функцій* (f_1, f_2, f_3), *що визначені на множині* Q, *є квазігруповим розв'язком функційного рівняння* (14) *тоді і тільки тоді, коли існує оборотна операція* g *така, що* $f_1 \perp g$ *і виконуються такі співвідношення:* $f_2 = {}^r g$, $f_3 = f_1 \underset{r}{\oplus} {}^r g$, *де* $(f \underset{r}{\oplus} h)(x, y) := f(x, h(x, y))$.

Доведення. Нехай трійка оборотних функцій (f_1, f_2, f_3), що визначені на множині Q, є розв'язком функційного рівняння (14), тобто виконується тотожність $f_1(x; {}^r g(x; y)) = f_3(x; y)$, де $g := {}^r f_2$, тобто $f_2 = {}^r g$. За лемою 1. маємо $f_1 \perp g$.

Навпаки, згідно з лемою 1.,

$$\left(f_1 \underset{r}{\oplus} {}^r g\right)(x; y) = f_1(x; {}^r g(x; y)) = f_1(x; f_2(x; y)).$$

Оскільки $f_1 \perp g$, то згідно з лемою 1. операція f_3 є оборотною. $\square$

Твердження 4. *Трійка оборотних бінарних функцій* (f_1, f_2, f_3), *що визначені на множині* Q, *є квазігруповим розв'язком функційного рівняння* (15) *тоді і тільки тоді, коли існує підстановка* α *та ідемпотентна квазігрупа* g *такі, що виконуються співвідношення:*

$$f_3(x; y) = f_1(\alpha x; y), \quad f_2(x; y) = g(\alpha x; \alpha y).$$

Доведення. Нехай трійка оборотних функцій (f_1, f_2, f_3), що визначені на множині Q, є розв'язком функційного рівняння (15), тобто виконується $f_1(f_2(x; x); y) = f_3(x; y)$. Звідси $f_2(x; x) = {}^\ell f_1(f_3(x; y), y)$. Підставимо $y := a \in Q$, тому $f_2(x; x) = \alpha x$, де $\alpha x := {}^\ell f_1(f_3(x; a), a)$. Перетворення α є підстановкою множини Q, оскільки α є композицією трансляцій оборотних функцій ${}^\ell f_1$ і f_3. Підставивши αx замість $f_2(x; x)$, отримаємо першу рівність із умови твердження. Визначимо операцію g, поклавши $g(x; y) := f_2(\alpha^{-1} x; \alpha^{-1} y)$, звідси маємо другу рівність із умови твердження.

Навпаки, нехай виконуються співвідношення теореми, тоді з ідемпотентності операції g випливає рівність $f_2(x, x) = g(\alpha x, \alpha x) = \alpha x$, тому

$$f_3(x, y) = f_1(\alpha x; y) = f_1(f_2(x; x); y).$$

$\square$

Твердження 5. *Трійка оборотних функцій* (f_1, f_2, f_3), *які визначені на множині* Q, *є квазігруповим розв'язком узагальненого рівняння* (16) *тоді і тільки тоді, коли існує елемент* $e \in Q$, *підстановка* α *множини* Q, *оборотна операція* h *та ідемпотентна оборотна функція* g *такі, що операції* f_3, h *— уніпотентні і* e *є їх спільним уніпотентним елементом, а також виконуються співвідношення:*

$$f_1(x; y) = h(\alpha^{-1} x, y), \qquad f_2(x; y) = g(\alpha x, \alpha y). \tag{18}$$

Доведення. Нехай трійка оборотних функцій (f_1, f_2, f_3), що визначені на множині Q, є розв'язком функційного рівняння (16), тобто виконується тотожність

$$f_1(f_2(x; x); x) = f_3(y; y). \tag{19}$$

Нехай a — довільний елемент носія. Введемо такі позначення:

$$e := f_3(a,a), \qquad g(x,y) := f_2(\alpha^{-1}x, \alpha^{-1}y), \qquad \alpha x := {}^{\ell}f_1(e,x), \qquad h(x,y) := f_1(\alpha x, y).$$

Покладемо в (19) $y = a$:

$$f_1(f_2(x;x);x) = e, \quad \text{звідси} \quad f_2(x;x) = {}^{\ell}f_1(e,x) = \alpha x.$$

Перетворення α є підстановкою носія, позаяк α є зсувом оборотної функції. З отриманої рівності маємо $x = f_2(\alpha^{-1}x, \alpha^{-1}y) = g(x,x)$. З означення випливає, що операція g є ізотопом оборотної операції, тому g — оборотна ідемпотентна операція.

Ліва частина рівності (19) дорівнює e, тому операція f_3 є уніпотентною, тобто e є середнім нейтральним елементом для операції f_3.

З рівності $\alpha x := {}^{\ell}f_1(e,x)$ випливає рівність $f_1(\alpha x, x) = e$, тобто h уніпотентна.

Навпаки, нехай виконуються умови теореми, тоді

$$f_1(f_2(x,x),x) = f_1(g(\alpha x, \alpha x),x) = f_1(\alpha x, x) = h(\alpha^{-1}\alpha x, x) = h(x,x) = e = f_3(y,y).$$

□

Твердження 6. *Трійка діагональних функцій* (f_1, f_2, f_3) *є розв'язком функційного рівняння типу* $(5;0)$ *тоді і тільки тоді, коли пара* $(\delta_2;\delta_3)$ *є трансверсаллю операції* f_1*, де* $\delta_2(x) := f_2(x,x)$*,* $\delta_3(x) := f_3(x,x)$.

Доведення. Згідно з означенням, трійка операцій (f_1, f_2, f_3) є розв'язком функційного рівняння (17) тоді і тільки тоді, коли виконується тотожність $f_1(x; f_2(x;x))) = f_3(x;x)$. Згідно з позначеннями ця рівність рівносильна рівності $f_1(x;\delta_2(x))) = \delta_3(x)$. Діагональність операцій f_2 і f_3 означає, що і δ_2 і δ_3 є підстановками множини Q. Тому виконання рівності означає, що пара $(\delta_2;\delta_3)$ є трансверсаллю операції f_1. □

Наслідок 4. *Існує точно одне антиквадратичне узагальнене рівняння функційної довжини 3 з точністю до парастрофно-первинної рівносильності, наприклад* (17).

Доведення випливає з теореми 4. і означення 4. □

Результат Р. Коваль [3], а саме теорему 2., можна сформулювати як наслідок, що випливає з теореми 4.

Наслідок 5. *Існує точно три майже квадратичних узагальнених рівнянь функційної довжини 3 з точністю до парастрофно-первинної рівносильності, наприклад* (14)*,* (15) *і* (16)*.*

Теорема 1., отримана В. Д. Білоусовим [7], подана нижче як наслідок з теореми 4. та наслідку 5. і сформульована в новій редакції.

Наслідок 6. *Існує точно одне майже квадратичне узагальнене рівняння без квадратів функційної довжини 2 з точністю до парастрофно-первинної рівносильності, наприклад* (14)*.*

4. Леми для класифікації рівнянь довжини чотири

В цій частині статті досліджуються узагальнені рівняння функційної довжини 4, їх повна класифікація з точністю до парастрофно-первинної рівносильності та розв'язування рівнянь на множині бінарних квазігруп.

Часткову класифікацію таких рівнянь вивчали Коваль, Сохацький та Крапєж. Коваль дала класифікацію рівнянь, які тут названі рівняннями типу $(2;2;2)$, проте вона дослідила не всі рівняння цього типу, лише чотири класи та навела множини розв'язків представників цих класів. Уточнену класифікацію лише квадратичних рівнянь функційної довжини 4 дав Крапєж, користуючись описанням ізоморфних графів. Він встановив, що таких рівнянь точно п'ять і виділив представника п'ятого класу та знайшов множину його розв'язків на бінарних квазігрупах. Проте його метод застосовний лише для квадратичних функційних рівнянь.

Певні класи неквадратичних рівнянь виділила Коваль. Тут ці рівняння названі рівняннями предметних типів $(4;2;0)$ та $(3;3;0)$. Повну класифікацію узагальнених рівнянь типу $(4;2;0)$ отримано [14], а класифікацію узагальнених рівнянь типу $(3;3;0)$ автором у статтях [15], [17].

Тут не лише дана повна класифікація рівнянь функційної довжини 4 за відношенням парастрофно-первинної рівносильності, а і класифіковано їх за предметними типами, зокрема встановлена їх парастрофно-первинна нерівносильність. До того ж, з кожного отриманого блока розбиття виділено представника та знайдено множину всіх його розв'язків на оборотних функціях довільної множини.

Лема 4. *Якщо у функційних рівняннях різна кількість різних незалежних предметних змінних, то такі рівняння парастрофно-первинно-нерівносильні.*

Доведення. Істинність цієї леми випливає з означення про парастрофно-первинні перетворення. Як і перейменування предметних змінних, так і перейменування функційних змінних не змінює кількості різних незалежних предметних змінних. Перетворення комутування теж залишає на місці цю кількість. Парастрофні перетворення ділення як лівого, так і правого збільшують кількість появ предметних змінних, а кількість різних предметних змінних залишається сталою. $\square$

Лема 5. *Квазігрупові нетривіальні функційні рівняння функційної довжини 4 існують лише чотирьох типів:* $(2;2;2)$, $(4;2;0)$, $(3;3;0)$, $(6;0;0)$.

Доведення. Оскільки всі функційні змінні в рівнянні бінарні, то кількість предметних змінних дорівнює 6, враховуючи їх повторення. Оскільки рівняння квазігрупове і нетривіальне, то кожна предметна змінна повторюється принаймні два рази, тому таке рівняння має не більше, ніж три різні предметні змінні, тобто предметний тип має вигляд (a,b,c), де $a,b,c>1$ і $a+b+c=6$. Занумеруємо предметні змінні так, що змінні лексикографічного порядку мають незростаючу кількість появ. Тому досить розглядати лише функційні рівняння із змінними x, y, z, в яких x має a появ, y — b появ, а z — c появ, тобто лише рівняння типів (a,b,c), де $a\geqslant b\geqslant c\geqslant 2$ і $a+b+c=6$. Ці умови задовольняють лише такі вибірки: $(2;2;2)$, $(4;2;0)$, $(3;3;0)$, $(6;0;0)$. $\square$

Лема 6. *З точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує принаймні 19 узагальнених рівнянь функційної довжини* 4*, які мають розподіл на:*

— *предметний тип* $(2;2;2)$ — *це рівняння:* (6)–(10);
— *предметний тип* $(4;2;0)$ — *це рівняння:*

$$F_1(x;y) = F_2(x;F_3(x;F_4(x;y))), \tag{20}$$

$$F_1(y;y) = F_2(F_3(x;x);F_4(x;x)), \tag{21}$$

$$F_1(x;x) = F_2(y;F_3(y;F_4(x;x))), \tag{22}$$

$$F_1(y;y) = F_2(x;F_3(x;F_4(x;x))), \tag{23}$$

$$F_1(x;x) = F_2(F_3(x;y);F_4(x;y)), \tag{24}$$

$$F_1(x;x) = F_2(x;F_3(y;F_4(x;y))); \tag{25}$$

— *предметний тип* $(3;3;0)$ — *це рівняння:*

$$F_1(x;y) = F_2(F_3(x;y);F_4(x;y)), \tag{26}$$

$$F_1(x;F_2(x;y)) = F_3(F_4(x;y);y), \tag{27}$$

$$F_1(x;F_2(y;y)) = F_3(x;F_4(x;y)), \tag{28}$$

$$F_1(x;y) = F_2(F_3(x;x);F_4(y;y)), \tag{29}$$

$$F_1(x;F_2(x;x)) = F_3(y;F_4(y;y)), \tag{30}$$

$$F_1(x;F_2(y;y)) = F_3(y;F_4(x;x)); \tag{31}$$

— *предметний тип* $(6;0;0)$ — *це рівняння:*

$$F_1(x;F_2(x;x)) = F_3(x;F_4(x;x)), \tag{32}$$

$$F_1(x;x) = F_2(F_3(x;x);F_4(x;x)). \tag{33}$$

Доведення. З точністю до комутування, всі узагальнені рівняння функційної довжини 4 можна поділити за довжиною підтермів. Оскільки рівняння бінарні, то згідно з означенням 6. предметна довжина такого рівняння є 6. Оскільки предметна довжина рівняння – це сума довжин лівої і правої частини рівняння, то враховуючи лему 3., всі такі рівняння за довжиною можна поділити на три види: $1=5$, $2=4$, $3=3$, де $m=n$ означає, m – предметна довжина терма лівої частини, а n – предметна довжина терма правої частини рівняння. Вид $1=5$ може мати вигляди $1=1+4$ та $1=2+3$. Перший поділимо зовні на одиничний підтерм, а другий на терм довжини два, в результаті отримаємо вид $2=4$ та вид $3=3$ відповідно. Вид $2=4$ може бути такого вигляду $2=1+(1+2)$ або $2=2+2$. У першому випадку зовнішнім діленням на терм довжини один, отримаємо вид $3=3$, який має вигляд $1+2=1+2$. Отже, всі узагальнені рівняння досить розглянути за розташуванням дужок таких форм:

$$A)\ 2=2+2, \quad B)\ 2=1+(1+2).$$

В межах даного доведення, всі функційні змінні позначаємо одним і тим самим символом $(\cdot)$ і вважаємо, що різні появи цього символу позначають різні функційні змінні, оскільки в загальному рівнянні всі функційні змінні є попарно різними. Інколи $(\cdot)$ опускаємо, наприклад, за цих позначень рівняння (20) мають вигляд: $xy = x\cdot(x\cdot xy)$.

Всі рівняння предметної довжини 6 можуть мати одну, дві, або три різних незалежних предметних змінних, кожна з яких має не менше дві появи. За означенням 7. — якщо рівняння мають одну незалежну предметну змінну, то їх тип — $(6;0;0)$, якщо — дві незалежних предметних змінних, то тип таких рівнянь може бути $(4;2;0)$ та $(3;3;0)$. Якщо рівняння мають три різних незалежних предметних змінних, то тип рівняння — $(2;2;2)$.

Враховуючи різні розташування дужок та зовнішнє ділення термів, маємо, що рівняння типу $(6;0;0)$ з точністю до парастрофно-первинної рівносильності можуть мати принаймні один із виглядів (32) та (33).

Рівняння предметного типу $(4;2;0)$ класифіковано в статті [14], як результат отримано рівняння (20)–(25).

Класифікацію узагальнених рівнянь предметного типу $(3;3;0)$ досліджено автором в статтях [15, 17], як результат отримано рівняння (26)–(31).

Узагальнених рівнянь предметного типу $(2;2;2)$ існує п'ять, згідно з теоремою 2., а саме рівняння (6)–(10). $\square$

5. Розв'язки рівнянь довжини чотири

Згідно з лемою 6., різних узагальнених функційних рівнянь типу $(4;2;0)$ є принаймні шість. Їх розв'язки отримано [14].

Квазігрупові розв'язки узагальнених функційних рівнянь (26)–(31) на множині бінарних квазігрупових операцій знайдено автором в [17].

В поданому нижче твердженні дано квазігруповий розв'язок одного з рівнянь типу $(3;3;0)$.

Твердження 7. *[17] Четвірка (f_1, f_2, f_3, f_4) оборотних бінарних функцій є квазігруповим розв'язком* (31)*, тоді і тільки тоді, коли функції f_2, f_4 діагональні та виконуються співвідношення:*

$$f_1(x;y) = f_3\left(\delta_{f_2}^{-1}(y);\delta_{f_4}(x)\right). \tag{34}$$

Розглянемо рівняння

$$F_1(F_3(x;x);y) = F_2(x;F_4(y;y)), \tag{35}$$

яке парастрофно-первинно-рівносильне рівнянню (31). Справді, за комутування підтермів, зміною частин рівняння місцями та перейменуванням функційних змінних, рівняння (31) $\asymp$ (35). З твердження 7. випливає такий наслідок.

Наслідок 7. *Четвірка оборотних операцій (f_1, f_2, f_3, f_4), що визначені на множині Q, є розв'язком рівняння* (35) *тоді і тільки тоді, коли існують підстановки γ, δ множини Q такі, що*

$$f_1(x;y) = f_2(\gamma^{-1}(x);\delta(y)), \quad f_3(x;x) = \gamma(x), \quad f_4(y;y) = \delta(y).$$

Нижче розв'язано функційні рівняння типу $(6;0;0)$ на множині діагональних оборотних операцій.

Твердження 8. *Четвірка оборотних функцій (f_1, f_2, f_3, f_4) є розв'язком рівняння* (32) *тоді і тільки тоді, коли функції f_2, f_4 діагональні; існують підстановки α, β носія,* *ідемпотентні оборотні операції* g_2 , g_4 *та оборотні —* g_1 , g_3 *із однаковими головними діагоналями такі, що*

$$f_1(x;y) = g_1(x, \alpha^{-1}y), \quad f_2(x;y) = g_2(\alpha x, \alpha y),$$
$$f_3(x;y) = g_1(x, \beta^{-1}y), \quad f_4(x;y) = g_4(\beta x, \beta y). \tag{36}$$

Доведення. Нехай четвірка оборотних функцій (f_1, f_2, f_3, f_4) є розв'язком рівняння (32) і функції f_2 і f_4 діагональні. Діагональність означає існування підстановок α , β носія таких, що $f_2(x;x) = \alpha x$, $f_4(y, y) = \beta y$. Замінимо в цих рівностях x на $\alpha^{-1}x$ та y на $\beta^{-1}y$, в результаті матимемо: $f_2(\alpha^{-1}x; \alpha^{-1}x) = x$, $f_4(\beta^{-1}y, \beta^{-1}y) = y$. Це означає, що операції, які визначені рівностями

$$g_2(x;y) := f_2(\alpha^{-1}x; \alpha^{-1}y), \qquad g_2(x;y) := f_4(\beta^{-1}x, \beta^{-1}y),$$

є оборотними та ідемпотентними, а з їх означення випливають дві рівності із (36). Знайдені значення для f_2 f_4 підставимо в (32):

$$f_1(x, g_2(\alpha x, \alpha x)) = f_3(x, g_4(\beta x, \beta x)).$$

Оскільки операції g_2 , g_4 ідемпотентні, то дана рівність рівносильна рівності

$$f_1(x, \alpha x) = f_3(x, \beta x).$$

А ця рівність означає, що операції, які визначені співвідношеннями

$$g_1(x, y) := f_1(x, \alpha y), \qquad g_3(x, y) := f_3(x, \beta y)$$

мають однакові діагоналі. Звідси й випливають дві інші рівності з (36).

Навпаки, нехай виконуються умови теореми, тоді

$$f_1(x, f_2(x, x)) = g_1(x, \alpha^{-1}g_2(\alpha x, \alpha x)) = g_1(x, \alpha^{-1}\alpha x) = g_1(x, x) =$$
$$= g_2(x, x) = g_2(x, \beta^{-1}\beta x) = g_2(x, \beta^{-1}g_4(\beta x, \beta x)) = f_3(x, f_4(x, x)).$$

Отже, четвірка оборотних функцій (f_1, f_2, f_3, f_4) є розв'язком рівняння (32) і функції f_2 , f_4 діагональні. □

Твердження 9. *Четвірка оборотних функцій* (f_1, f_2, f_3, f_4) *є розв'язком рівняння* (33) *тоді і тільки тоді, коли функції* f_1 , f_3 , f_4 *діагональні; існують підстановки* γ_i , $i = 1, 3, 4$ *, носія та ідемпотентні оборотні операції* g_1 , g_2 , g_3 , g_4 *такі, що виконуються співвідношення:*

$$f_i(x;y) = g_i(\gamma_i x, \gamma_i y), \quad i = 1, 3, 4;$$
$$f_2(x;y) = g_2(\gamma_1\gamma_3^{-1}x, \gamma_1\gamma_4^{-1}y). \tag{37}$$

Доведення. Нехай четвірка оборотних функцій (f_1, f_2, f_3, f_4) є розв'язком рівняння (33) і функції f_1 , f_3 , f_4 діагональні, тобто виконується тотожність

$$f_1(x, x) = f_2(f_3(x, x), f_4(x, x)) \tag{38}$$

та існують підстановки γ_i , $i = 1, 3, 4$, носія такі, що $f_i(x, x) = \gamma_i x$, де $i = 1, 3, 4$. Замінимо в останній рівності x на $\gamma_i^{-1}x$: $f_i(\gamma_i^{-1}x, \gamma_i^{-1}x) = x$, $i = 1, 3, 4$. Це означає, що операції, які визначені рівностями $g_i(x,y) := f_i(\gamma_i^{-1}x, \gamma_i^{-1}x)$, $\quad i = 1,3,4$ ідемпотентні та оборотні. Очевидно, що з цих рівностей випливають три рівності із (37). Знайдені значення для f_1, f_3, f_4 підставимо в (38):

$$g_1(\gamma_1 x, \gamma_1 x) = f_2(g_3(\gamma_3 x, \gamma_3 x), g_4(\gamma_4 x, \gamma_4 x)).$$

Позаяк операції g_1, g_3, g_4 ідемпотентні, то дана рівність рівносильна $\gamma_1 x = f_2(\gamma_3 x, \gamma_4 x)$. Замінивши x на $\gamma_1^{-1}x$, маємо ідемпотентність операції, яка визначена такою рівністю $g_2(x,y) := f_2(\gamma_3\gamma_1^{-1}x, \gamma_4\gamma_1^{-1}y)$. З цієї рівності випливає четверта рівність із (37).

Навпаки, нехай виконуються співвідношення (37) для деяких підстановок γ_1, γ_3, γ_4 носія і для деяких ідемпотентних оборотних операцій g_1, g_2, g_3, g_4, тоді

$$\begin{aligned} f_1(x;x) &= g_1(\gamma_1 x, \gamma_1 x) = \gamma_1 x = g_2(\gamma_1 x, \gamma_1 x) = f_2(\gamma_3\gamma_1^{-1}\gamma_1 x, \gamma_4\gamma_1^{-1}\gamma_1 x) = \\ &= f_2(\gamma_3 x, \gamma_4 x) = f_2(g_3(\gamma_3 x, \gamma_3 x), g_4(\gamma_4 x, \gamma_4 x)) = \\ &= f_2(f_3(x;x); f_4(x;x)). \end{aligned}$$

Отже, четвірка (f_1, f_2, f_3, f_4) є розв'язком рівняння (33) і функції f_1, f_3, f_4 діагональні, позаяк функції g_1, g_3, g_4 ідемпотентні. □

6. Повна класифікація рівнянь довжини 4

В цій частині статті наведено теорему про повну класифікацію узагальнених рівнянь довжини 4, доведення якої складається з декількох частин. Перша частина доведення викладена в лемі 6., друга частина наведена тут після формулювання теореми і стосується попарної парастрофно-первинної нерівносильності отриманих рівнянь в лемі 6..

Теорема 5. *З точністю до парастрофно-первинної рівносильності узагальнених рівнянь функційної довжини 4 існує точно 19:*
— предметного типу $(2;2;2)$ *— це рівняння* (6)–(10)*;*
— предметного типу $(4;2;0)$ *— це рівняння* (20)–(25)*;*
— предметного типу $(3;3;0)$ *— це рівняння* (26)–(31)*;*
— предметного типу $(6;0;0)$ *— це рівняння* (32)–(33)*.*

Доведення. Згідно з лемою 6. кожне функційне рівняння довжини 4 парастрофно-первинно-рівносильне принаймні одному із рівнянь списку (6)–(10), (20)–(33), які розприділені за предметними типами.

Попарна парастрофно-первинна нерівносильність рівнянь типу $(2;2;2)$, тобто рівнянь (6)–(10) доведена в теоремі 2.. Кожне з цих рівнянь має три предметних змінних, а інші рівняння із цього списку мають дві і одну предметну змінну відповідно. Тому, згідно з лемою 4., кожне з рівнянь (6)–(10) парастрофно-первинно-нерівносильне кожному з рівнянь (20)–(33).

Рівняння (32) та (33) мають одну змінну, а рівняння (20)–(31) мають дві предметних змінних, тому, згідно з лемою 4., і (32), і (33) парастрофно-первинно-нерівносильні кожному з рівнянь (20)–(31).

Доведемо парастрофно-первинну нерівносильність рівнянь (32) і (33). Кожне рівняння, яке парастрофно-первинно-рівносильне рівнянню (32) з точністю до перестановки підтермів, має один із таких видів:

$$1+2 = 1+2, \quad 2 = 1+(1+2), \quad 1 = 1+(1+(1+2)). \tag{39}$$

Ця множина таких рівнянь інваріантна відносно всіх можливих парастрофно-первинних перетворень. Справді, застосування внутрішнього ділення до рівняння (32) неможливе, оскільки це перетворення передбачає наявність у рівнянні принаймні двох різних предметних змінних. Перейменування предметних, функційних змінних і перестановка сторін рівняння не змінює його виду з точністю до комутування. Результатом зовнішнього ділення на підтерм будь-якого рівняння одного із цих видів є також рівняння одного із цих видів. Отже, будь-яке рівняння, яке парастрофно-первинно-рівносильне рівнянню (32) має з точністю до перестановки підтермів один із видів (39). Рівняння (33) має вид $2 = 2 + 2$, тому воно парастрофно-первинно-нерівносильне рівнянню (32).

Рівняння (20)–(31) розподілені за двома типами $(4;2;0)$ та $(3;3;0)$. Доведення їх попарної парастрофно-первинної нерівносильність розіб'ємо на три етапи: спочатку для рівнянь типу $(4;2;0)$, потім — для рівнянь типу $(3;3;0)$, а потім доведемо для рівнянь, які мають різний тип.

Розглянемо рівняння типу $(4;2;0)$. Згідно з лемою 6., це рівняння (20)–(25). Парастрофно-первинну нерівносильність цих рівнянь встановлено в [14].

Розглянемо парастрофно-первинну нерівносильність рівнянь типу $(3;3;0)$. Згідно з лемою 6., досить довести парастрофно-первинну нерівносильність рівнянь (26)–(31). У статті [17] доведена діагональна парастрофно-первинна нерівносильність (26)–(31), де два рівняння діагонально-рівносильні, а саме (29) і (31). Проте ці рівняння парастрофно-первинно-нерівносильні. Для початку покажемо, що (29) і (31) діагонально парастрофно-первинно-рівносильні. Справді, (29) можна записати так:

$$F_1(x;y) = {}^sF_2(\delta_{F_4}(y), F_3(x;x)), \qquad F_1(x;\delta_{F_4}^{-1}(y)) = {}^sF_2(y, F_3(x;x)).$$

Позначимо $F_2'(y;y) := \delta_{F_4}^{-1}(y)$, $F_3' := {}^sF_2$, $F_4' = F_3$, як результат отримуємо $F_1(x; F_2'(y;y)) = F_3'(y, F_4'(x;x))$, що збігається з (31).

Проте ці рівняння (29) і (31) парастрофно-первинно-нерівносильні. Доведемо цей факт, використовуючи парастрофно-первинно-рівносильне рівняння (35), методом припущення.

Припустимо, що $(29) \asymp (31)$. Оскільки $(31) \asymp (35)$ за побудовою, то й рівняння $(29) \asymp (35)$. Це означає як наслідок з леми2., що існує вибірка перестановок $(\tau, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ від рівняння (29) до рівняння (35) така, що для довільного квазігрупового розв'язку (f_1, f_2, f_3, f_4) рівняння (29) вибірка

$$({}^{\sigma_1}f_{1\tau}, {}^{\sigma_2}f_{2\tau}, {}^{\sigma_3}f_{3\tau}, {}^{\sigma_4}f_{4\tau}), \tag{40}$$

є розв'язком рівняння (35). Виберемо довільні попарно різні квазігрупи Штейнера, які можуть бути навіть ізоморфними. Тоді четвірка цих квазігруп (f_1, f_2, f_3, f_4), де $f_1 = f_2$ є розв'язком рівняння (29). Оскільки квазігрупа Штейнера за означенням є ідемпотентною квазігрупою, то всі парастрофи квазігрупи Штейнера збігаються з нею самою. Врахувавши цей факт, вибірка з (40) має вигляд $(f_{1\tau}, f_{2\tau}, f_{3\tau}, f_{4\tau})$ і теж є розв'язком рівняння (35), тобто виконується така тотожність $f_{1\tau}(f_{3\tau}(x;x);y) = f_{2\tau}(x; f_{4\tau}(y;y))$. Оскільки операція ідемпотентна, то отримані тотожності рівносильні рівності $f_{1\tau} = f_{2\tau}$. Оскільки у вибраній четвірці операцій лише дві операції збігаються, то $\{1\tau, 2\tau\} = \{1, 2\}$. Тому надалі вважатимемо, що

$$\{1\tau, 2\tau\} = \{1, 2\}, \qquad \{3\tau, 4\tau\} = \{3, 4\}. \tag{41}$$

Нехай оборотна операція f є асиметричною, тобто всі її парастрофи попарно різні, а h — довільна ідемпотентна операція, тоді четвірка (f, f, h, h) є розв'язком рівняння (29). Враховуючи співвідношення (41) вибірка з (40) має вигляд $({}^{\sigma_1}f, {}^{\sigma_2}f, {}^{\sigma_3}h, {}^{\sigma_4}h)$ і є розв'язком рівняння (35). Оскільки всі парастрофи операції h ідемпотентні, то підставивши дану четвірку в рівняння (35), отримаємо рівність ${}^{\sigma_1}f = {}^{\sigma_2}f$. Оскільки всі парастрофи операції f попарно різні, бо вона асиметрична, то $\sigma_1 = \sigma_2$, тому далі розглянемо вибірку перестановок

$$(\tau, \sigma, \sigma, \sigma_3, \sigma_4), \tag{42}$$

для яких виконується (41).

Розглянемо адитивну групу кільця $Z_3 \times Z_3$ і α автоморфізм цієї групи, який визначений матрицею A: $\alpha(\bar{x}) := \bar{x} \cdot A$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Оберненою до цієї матриці є матриця $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Операції f_1, f_2 та f визначимо такими рівностями:

$$f_1(\bar{x}; \bar{y}) := \bar{x}A + \bar{y}A, \quad f_2(\bar{x}; \bar{y}) := \bar{x} + \bar{y}, \tag{43}$$

$$f(\bar{x}; \bar{y}) := \bar{x}A^{-1} + \bar{y}A^{-1}. \tag{44}$$

Оскільки $f(\bar{x}; \bar{x}) = \bar{x}A^{-1} + \bar{x}A^{-1} = \bar{x}(2A^{-1}) = \bar{x}A$, то четвірка (f_1, f_2, f, f) є розв'язком рівняння (29). Згідно з (40) та (42), розв'язком рівняння (35) є вибірка $({}^{\sigma}f_1, {}^{\sigma}f_2, {}^{\sigma_3}f, {}^{\sigma_4}f)$. Згідно з наслідком 7. дана вибірка є розв'язком рівняння (35) тоді і тільки тоді, коли існують підстановки γ, δ такі, що

$${}^{\sigma}f_1(\bar{x}; \bar{y}) = {}^{\sigma}f_2(\gamma^{-1}(\bar{x}); \delta(\bar{y})), \quad {}^{\sigma_3}f(\bar{x}; \bar{x}) = \gamma(\bar{x}), \quad {}^{\sigma_4}f(\bar{y}; \bar{y}) = \delta(\bar{y}). \tag{45}$$

Оскільки останні дві рівності однакові, тому розглянемо співвідношення

$${}^{\tau}f(\bar{x}; \bar{x}) = \theta(\bar{x}), \tag{46}$$

для якого $\tau \in \{\sigma_3, \sigma_4\}$, $\theta \in \{\gamma, \delta\}$.

Якщо $\tau \in \{\iota, s\}$, то $f(\bar{x}; \bar{x}) = \theta(\bar{x})$, тоді з (44) випливає, що $\theta\bar{x} = \bar{x}A$.

Якщо $\tau \in \{\ell, s\ell\}$, то ${}^{\ell}f(\bar{x}; \bar{x}) = \theta\bar{x}$, тобто $f(\theta\bar{x}; \bar{x}) = \bar{x}$. Скориставшись (44) маємо $\theta(\bar{x}) \cdot A^{-1} + \bar{x}A^{-1} = \bar{x}$. Звідси знайдемо $\theta(\bar{x})$:

$$\theta\bar{x} + \bar{x} = \bar{x}A, \quad \theta\bar{x} = \bar{x}A - \bar{x} = \bar{x}(A - E).$$

Підставивши замість матриць їх значення, маємо

$$\bar{x}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \bar{x}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

І нарешті, якщо $\tau \in \{\ell, s\ell\}$, то ${}^{r}f(\bar{x}; \bar{x}) = \theta\bar{x}$, тобто $f(\bar{x}; \theta\bar{x}) = \bar{x}$. Оскільки операція f комутативна, то дане рівняння рівносильне $f(\theta\bar{x}; \bar{x}) = \bar{x}$, а цей випадок розглянуто вище. Отже, (46) спричинює таку залежність

$$\theta(\bar{x}) = \begin{cases} \bar{x}A & \text{якщо } \tau \in \{\iota, s\}, \\ \bar{x}B & \text{якщо } \tau \notin \{\iota, s\}, \end{cases}$$

де $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ і $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Для σ_3 і σ_4 розглянемо чотири можливих варіанти:

$$\sigma_3 \in \{\iota, s\} \ \wedge \ \sigma_4 \in \{\iota, s\}; \qquad \sigma_3 \in \{\iota, s\} \ \wedge \ \sigma_4 \notin \{\iota, s\};$$
$$\sigma_3 \notin \{\iota, s\} \ \wedge \ \sigma_4 \in \{\iota, s\}; \qquad \sigma_3 \notin \{\iota, s\} \ \wedge \ \sigma_4 \notin \{\iota, s\}.$$

Застосувавши щойно доведене співвідношення до другої і третьої рівностей із (45), отримаємо

$$\gamma\bar{x} = \bar{x}A \ \wedge \ \delta\bar{x} = \bar{x}A; \qquad \gamma\bar{x} = \bar{x}A \ \wedge \ \delta\bar{x} = \bar{x}B;$$
$$\gamma\bar{x} = \bar{x}B \ \wedge \ \delta\bar{x} = \bar{x}A; \qquad \gamma\bar{x} = \bar{x}B \ \wedge \ \delta\bar{x} = \bar{x}B.$$

Тому для першої рівності із (45) маємо чотири можливих випадки:

$$\begin{array}{ll} {}^{\sigma}\!f_1(\bar{x};\bar{y}) = {}^{\sigma}\!f_2(\bar{x}A^{-1};\bar{y}A); & {}^{\sigma}\!f_1(\bar{x};\bar{y}) = {}^{\sigma}\!f_2(\bar{x}A^{-1};\bar{y}B); \\ {}^{\sigma}\!f_1(\bar{x};\bar{y}) = {}^{\sigma}\!f_2(\bar{x}B^{-1};\bar{y}A); & {}^{\sigma}\!f_1(\bar{x};\bar{y}) = {}^{\sigma}\!f_2(\bar{x}B^{-1};\bar{y}B). \end{array} \tag{47}$$

Розглянемо дані рівності для всіх можливих $\sigma \in S_3$. Точніше розглянемо всі різні парастрофи операцій f_1 та f_2.

Позаяк операції f_1 і f_2 комутативні, тому кожна з них має три різні парастрофи, тобто сама операція, її ліве ділення та її праве ділення. Самі операції визначені рівностями (43), а їх ділення можна обчислити за такими формулами:

$$\begin{array}{ll} {}^{\ell}\!f_1(\bar{x};\bar{y}) = \bar{x}A^{-1} - \bar{y}, & {}^{r}\!f_1(\bar{x};\bar{y}) = -\bar{x} + \bar{y}A^{-1}, \\ {}^{\ell}\!f_2(\bar{x};\bar{y}) = \bar{x} - \bar{y}, & {}^{r}\!f_2(\bar{x};\bar{y}) = -\bar{x} + \bar{y}. \end{array} \tag{48}$$

Кожну із цих чотирьох рівностей розглянемо для кожного із значень параметра $\sigma \in \{\iota, \ell, r\}$.

Якщо $\sigma = \iota$, то із (43), враховуючи (47) маємо:

$$\bar{x}A + \bar{y}A = \bar{x}A^{-1} + \bar{y}A; \qquad \bar{x}A + \bar{y}A = \bar{x}A^{-1} + \bar{y}B;$$
$$\bar{x}A + \bar{y}A = \bar{x}B^{-1} + \bar{y}A; \qquad \bar{x}A + \bar{y}A = \bar{x}B^{-1} + \bar{y}B.$$

Покладемо в усіх цих рівностях $\bar{y} = \bar{0}$, в результаті отримаємо $A = A^{-1}$ або $A = B^{-1}$. Обидві рівності не виконуються, тому маємо протиріччя.

Якщо $\sigma = \ell$, то з (48), враховуючи (47) маємо:

$$\bar{x}A^{-1} - \bar{y} = \bar{x}A^{-1} - \bar{y}A; \qquad \bar{x}A^{-1} - \bar{y} = \bar{x}A^{-1} - \bar{y}B;$$
$$\bar{x}A^{-1} - \bar{y} = \bar{x}B^{-1} - \bar{y}A; \qquad \bar{x}A^{-1} - \bar{y} = \bar{x}B^{-1} - \bar{y}B.$$

В усіх цих рівностях при $\bar{x} = \bar{0}$ маємо $A = E$ або $B = E$, тобто в кожному випадку маємо протиріччя.

І нарешті, якщо $\sigma = r$, то з (48) і (47) маємо:

$$-\bar{x} + \bar{y}A^{-1} = -\bar{x}A^{-1} + \bar{y}A; \qquad -\bar{x} + \bar{y}A^{-1} = -\bar{x}A^{-1} + \bar{y}B;$$
$$-\bar{x} + \bar{y}A^{-1} = -\bar{x}B^{-1} + \bar{y}A; \qquad -\bar{x} + \bar{y}A^{-1} = -\bar{x}B^{-1} + \bar{y}B.$$

При $\bar{y} = \bar{0}$ з усіх цих рівностей отримуємо $A = E$ або $B = E$. Знову отримали протиріччя.

Отримані протиріччя показують, що припущення неправильне, тому рівняння (29) і (35) парастрофно-первинно-нерівносильні. А отже, парастрофно-первинно-нерівносильними є рівняння (29) і (31).

Встановимо парастрофно-первинну нерівносильність між типами узагальнених рівнянь теореми. Згідно Леми 4., всі рівняння типів $(6;0;0)$ і $(2;2;2)$ попарно парастрофно-первинно-нерівносильні між собою та між всіма іншими типами узагальнених рівнянь. Залишається дослідити парастрофно-первинну нерівносильність між типами рівнянь $(4;2;0)$ і $(3;3;0)$. Як доведено вище, рівнянь типу $(3;3;0)$ та типу $(4;2;0)$ є точно по шість, а саме (20)–(25) та (26)–(31). Довільна TS-лупа є розв'язком кожного з рівнянь (20)–(25), але вона не є розв'язком жодного з рівнянь (26)–(31), оскільки в результаті отримуємо одноелемнтну квазігрупу в кожному з рівнянь. Справді, покажемо спочатку, що довільна TS-лупа, нехай $(Q;\cdot)$, є розв'язком кожного з рівнянь (20)–(25). Оскільки всі парастрофи довільної TS-лупи збігаються, то досить показати, що це означає, що четвірка функцій $(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ є розв'язком кожного з рівнянь (20)–(25). Це означає, що виконуються такі тотожності:

$$y^2 = x\cdot(x\cdot x^2),\quad x^2 = xy\cdot xy,\quad x^2 = x(y\cdot xy),$$

$$xy = x(x\cdot xy),\quad y^2 = x^2x^2,\quad x^2 = y(y\cdot x^2).$$

Підставимо четвірку функцій $(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ в кожне з рівнянь (26)–(31), в результаті отримаємо виконання відповідних тотожностей:

$$xy = x^2\cdot y^2,\quad x\cdot x^2 = y\cdot y^2,\quad x\cdot y^2 = y\cdot x^2,$$

$$xy = xy\cdot xy,\quad x\cdot xy = xy\cdot y,\quad xy^2 = x\cdot xy.$$

Згідно з властивостями TS-лупи ці тотожності можливі лише в одноелементних квазігрупах, тому згідно з лемою 2., четвірка операцій $(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ не є розв'язком жодного з рівнянь (26)–(31). Це доводить попарну парастрофно-первинну нерівносильність відповідних пар рівнянь між типами $(4;2;0)$ і $(3;3;0)$. □

Наслідок 8. *Існує точно вісім антиквадратичних узагальнених рівняннь функційної довжини 4 з точністю до парастрофно-первинної рівносильності, наприклад* (26)–(33), *з них точно два рівняння без квадратів, наприклад* (26), (27).

Доведення випливає з доведення теореми 5. і означення 4.. □

Наслідок 9. *Існує точно шість майже квадратичних узагальнених рівняннь функційної довжини 4 з точністю до парастрофно-первинної рівносильності, наприклад (20)–(25), з них точно одне рівняння без квадратів, наприклад (20).*

Доведення випливає з доведення теореми 5. і означення 3.. □

Наслідок 10. *Існує точно п'ять квадратичних узагальнених рівнянь функційної довжини 4 з точністю до парастрофно-первинної рівносильності, наприклад* (6)–(10), *з них точно два рівняння без квадратів* (6) *та* (8).

Доведення випливає з доведення теореми 5., доведення теореми 2. і означення квадратичного рівняння. □

7. Класифікація тотожностей

Тотожність в класі квазігруп можна визначити як квазігрупове функційне рівняння, в якому всі функційні змінні попарно парастрофні. Множина квазігрупових тотожностей замкнена відносно парастрофно-первинних перетворень. Довільні парастрофно-первинно рівносильні квазігрупові тотожності є парастрофно-рівносильними, але навпаки це не так. Тому класифікація узагальнених функційних рівнянь з точністю до парастрофно-первинної рівносильності спричинює деяку класифікацію тотожностей.

Нехай P — довільне твердження в класі квазігруп $\mathfrak{A}$. Твердження ${}^{\sigma}P$ називається σ-парастрофом твердження P, якщо його можна отримати з P заміною кожного τ-парастрофа на $\tau\sigma^{-1}$-парастроф. Клас всіх σ-парастрофів квазігруп з класу $\mathfrak{A}$ називається σ-парастрофом ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$ класу $\mathfrak{A}$. Основний закон парастрофної симетрії: "Твердження P істинне в класі квазігруп $\mathfrak{A}$ тоді і тільки тоді, коли ${}^{\sigma}P$ істинне в ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$" [1]. Найчастіше він використовується, коли твердження P є тотожністю, а саме тотожність $\omega = \upsilon$ визначає многовид квазігруп $\mathfrak{A}$, тоді і тільки тоді, коли σ-парастроф ${}^{\sigma}(\omega = \upsilon)$ цієї тотожності визначає многовид ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$, де $\sigma \in S_3$.

Означення 8. *Перехід від тотожності* $\mathfrak{id}$ *до тотожності* ${}^{\sigma}\mathfrak{id}$ *називається парастрофним перетворенням (σ-парастрофним перетворенням), якщо її можна отримати заміною головної операції на її σ^{-1}-парастроф.*

Зауважимо, що тотожність ${}^{\sigma}(\omega = \upsilon)$ отримується з тотожності $\omega = \upsilon$ заміною довільного парастрофа $(\overset{\tau}{\cdot})$ на $(\overset{\tau\sigma^{-1}}{\cdot})$. Наприклад, $s\ell$-парастрофом тотожності $xy \cdot y = x$ є тотожність $(x \overset{sr}{\cdot} y) \overset{sr}{\cdot} y = x$, оскільки $(s\ell)^{-1} = sr$. Отриману тотожність запишемо у вигляді $(x\ {}^{s}(\overset{r}{\cdot})\ y)\ {}^{s}(\overset{r}{\cdot})\ y = x$. Але з означення s-парастрофа випливає, що $t_1 \overset{s}{\cdot} t_2 = t_2 \cdot t_1$ для довільних термів t_1, t_2. Тому маємо рівносильну їй тотожність $y \overset{r}{\cdot} (y \overset{r}{\cdot} x) = x$. Скориставшись означенням r-парастрофа, маємо $y \cdot x = y \overset{r}{\cdot} x$. Знову застосуємо означення r-парастрофа: $x = y \cdot yx$. Отже, клас ${}^{s\ell}\mathfrak{A}$ є многовидом, який визначається тотожністю $y \cdot yx = x$.

Зауважимо, що має місце такий наслідок.

Наслідок 11. *Тотожність* ${}^{\tau}({}^{\sigma}(\omega = \upsilon))$ *рівносильна тотожності* ${}^{\tau\sigma}(\omega = \upsilon)$, *де* $\sigma, \tau \in S_3$.

Дві тотожності називаються:
— рівносильними, якщо вони визначають один і той самий многовид;
— парастрофно-рівносильними, якщо вони визначають парастрофні многовиди.

Означення 9. *Нехай F — довільна функційна змінна, тоді ${}^{\iota}F$, ${}^{\ell}F$, ${}^{r}F$, ${}^{s}F$, ${}^{s\ell}F$, ${}^{sr}F$ називаємо парастрофами функційної змінної F і вони набувають значення відповідного парастрофа операції f, якщо змінна F набуває значення f.*

Означення 10. *Узагальненим парастрофом функційної змінної F назвемо функційну змінну ${}^{\sigma}F$, де σ — змінна, яка набуває значення в множині S_3.*

Означення 11. *Залежні функційні змінні назвемо парастрофно-незалежними, якщо вони незалежно набувають значень в множині парастрофів однієї й тієї ж змінної.*

Означення 12. *Функційне рівняння назвемо узагальненою тотожністю, якщо всі функційні змінні є попарно різними узагальненими парастрофами однієї і тієї ж функційної змінної.*

Відповідно до означення 12. та з теореми 3. випливає таке твердження.

Наслідок 12. *З точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує точно три узагальнені тотожності довжини 2*

$$x \overset{\tau}{\cdot} y = x \overset{\sigma}{\cdot} y, \tag{49}$$

$$x \overset{\nu}{\cdot} x = y \overset{\pi}{\cdot} y, \qquad (50)$$

$$x \overset{\delta}{\cdot} x = x \overset{\rho}{\cdot} x, \qquad (51)$$

де $\tau, \sigma, \nu, \pi, \delta, \rho \in S_3$.

Розглянемо випадок, коли функційні змінні залежні, а саме, коли вони є парастрофами однієї і тієї ж змінної, наприклад $F_1 = {}^{\tau}F$, $F_2 = {}^{\sigma}F$, де $\tau\sigma \in S_3$. Узагальнені рівняння функційної довжини 2 на квазігрупах, а саме (11), (12) та (13) у префіксному позначенні матимуть вигляд:

$${}^{\tau}F(x; y) = {}^{\sigma}F(x; y), \qquad {}^{\nu}F(x; x) = {}^{\pi}F(y; y), \qquad {}^{\delta}F(x; x) = {}^{\rho}F(x; x).$$

В основному користуємося інфіксним позначенням для узагальнених тотожностей, тому ці узагальнені тотожності довжини 2 мають вигляд (49), (50), (51). Коли мова йде про функційні рівняння, то користуємося префіксним позначенням, наприклад як і в наведених нижче теоремах.

Теорема 6. *Розв'язком рівняння (49) є многовид:*
— *всіх квазігруп, якщо* $\sigma = \tau \in S_3$ *;*
— *правосиметричних квазігруп, якщо* $\sigma^{-1}\tau = \ell$ *;*
— *лівосиметричних квазігруп, якщо* $\sigma^{-1}\tau = r$ *;*
— *напівсиметричних квазігруп, якщо* $\sigma^{-1}\tau = s\ell$ *або* $\sigma^{-1}\tau = sr$ *;*
— *комутативних квазігруп, якщо* $\sigma^{-1}\tau = s$ *.*

Доведення. Нехай квазігрупа $(Q; f)$ є розв'язком рівняння (49), тобто в $(Q; f)$ виконується тотожність ${}^{\tau}f = {}^{\sigma}f$. Дана тотожність рівносильна тотожності ${}^{\sigma^{-1}\tau}f = f$, яка означає, що $\sigma^{-1}\tau$ належить групі парастрофних симетрій операції f : $\sigma^{-1}\tau \in \mathrm{Ps}(f)$.

Отже, розв'язками рівняння (49) є квазігрупи, група симетрій яких містить перестановку $\sigma^{-1}\tau$. Клас всіх таких квазігруп є многовид, група симетрій якого дорівнює циклічній групі, що породжена елементом $\sigma^{-1}\tau$. Оскільки група S_3 має п'ять циклічних підгруп: $\{\iota\}$, $\{\iota, s\}$, $\{\iota, \ell\}$, $\{\iota, r\}$, $\{\iota, s\ell, sr\}$, то й многовидів також буде п'ять з умови теореми. □

Теорема 7. *Розв'язком рівняння (50) є многовид:*
— *середніх луп, якщо* $\nu = \pi$ *або* $\nu = s\pi$ *, де* $\pi \in \{\iota, s\}$ *;*
— *лівих луп, якщо* $\nu = \pi$ *або* $\nu = s\pi$ *, де* $\pi \in \{\ell, s\ell\}$ *;*
— *правих луп, якщо* $\nu = \pi$ *або* $\nu = s\pi$ *, де* $\pi \in \{r, sr\}$ *;*
— *ліво-середніх луп, якщо* $\nu \neq \pi$ *, де* $\{\nu, \pi\} \in \{\{\iota, \ell\}, \{s, s\ell\}, \{\iota, s\ell\}, \{s, \ell\}\}$ *;*
— *право-середніх луп, якщо* $\nu \neq \pi$ *,* $\{\nu, \pi\} \in \{\{\iota, r\}, \{s, sr\}, \{\iota, sr\}, \{s, r\}\}$ *;*
— *ліво-правих луп, якщо* $\nu \neq \pi$ *, де* $\{\nu, \pi\} \in \{\{\ell, r\}, \{s\ell, sr\}, \{r, s\ell\}, \{\ell, sr\}\}$ *.*

Доведення. Нехай квазігрупа $(Q; f)$ є розв'язком рівняння (49), тобто в $(Q; f)$ виконується тотожність ${}^{\nu}f = {}^{\pi}f$. Оскільки на кожному місці є шість можливих парастрофів функційних змінних, то всього 36 пар функцій можуть бути розв'язком рівняння (49). Дана тотожність рівносильна тотожності ${}^{\pi^{-1}\nu}f = f$, де $\pi^{-1}\nu \in S_3$. Якщо $\nu = \pi$, то маємо парастрофні многовиди односторонніх луп. Таких пар функцій буде 4, наприклад для середніх луп (ι, ι) , (s, s) або (ι, s) , (s, ι) та всього для односторонніх луп буде 12. Якщо $\nu \neq \pi$, то маємо парастрофні многовиди двосторонніх луп при відповідних наборах множин парастрофів. Всього таких пар функцій буде 24. □

Теорема 8. *Розв'язком рівняння (51) є многовид, який визначається тотожністю:*
— *всіх квазігруп, якщо* $\delta = \rho \in S_3$ *або якщо* $\delta \neq \rho$ *при* $\delta^{-1}\rho = \{\iota, s\}$ *;*
— $x^2 \cdot x = x$ *, якщо* $\delta \neq \rho$ *при* $\delta^{-1}\rho = \ell$ *або* $\delta^{-1}\rho = s\ell$ *;*
— $x \cdot x^2 = x$ *, якщо* $\delta \neq \rho$ *при* $\delta^{-1}\rho = r$ *або* $\delta^{-1}\rho = sr$ *;*
— $(x \overset{r}{\cdot} x) \cdot x = x$ *або* $x \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} x) = x$ *в інших випадках.*

Доведення. Нехай квазігрупа $(Q; f)$ є розв'язком рівняння (51), тобто в $(Q; f)$ виконується тотожність ${}^{\delta}f = {}^{\rho}f$. Оскільки на кожному місці можливих шість парастрофів функційних змінних, то всього 36 пар функцій можуть бути розв'язком рівняння (51). Дана тотожність рівносильна тотожності ${}^{\delta^{-1}\rho}f = f$, де $\delta^{-1}\rho \in S_3$, яка означає, що $\delta^{-1}\rho$ належить групі парастрофних симетрій операції $f:\ \delta^{-1}\rho \in \mathrm{Ps}(f)$.

Отже, розв'язками рівняння (51) є квазігрупи, група симетрій яких містить перестановку $\delta^{-1}\rho$. Класом всіх таких квазігруп є многовид, група симетрій якого дорівнює циклічній групі, що породжена елементом $\delta^{-1}\rho$. Оскільки група S_3 має п'ять циклічних підгруп: $\{\iota\}$, $\{\iota, s\}$, $\{\iota, \ell\}$, $\{\iota, r\}$, $\{\iota, s\ell, sr\}$, то многовидів теж буде не більше п'яти. Розглянемо всі випадки.

Якщо $\delta = \rho \in S_3$, то маємо многовид всіх квазігруп. Якщо $\delta \neq \rho$, то при $\rho\delta^{-1} = s$ теж маємо многовид всіх квазігруп. Якщо $\rho\delta^{-1} = \ell$ або $\rho\delta^{-1} = s\ell$, то в першому випадку (за означенням лівого ділення), а в другому випадку (за означенням комутуваняння та означенням лівого ділення) маємо тотожність $x^2 \cdot x = x$. Якщо $\rho\delta^{-1} = r$ або $\rho\delta^{-1} = sr$, то в першому випадку (за означнням правого ділення), а в другому випадку (за означеннями комутування та правого ділення) маємо тотожність $x \cdot x^2 = x$. □

Теорема 9. *Клас многовидів квазігруп, який визначається узагальненою тотожністю* (49) *з точністю до парастрофної рівносильності має три різних пучки многовидів:*
— *клас всіх квазігруп, якщо* $\tau = \sigma \in S_3$;
— *клас напівсиметричних квазігруп, якщо*

$$\{\tau, \sigma\} \in \{\{\iota, s\ell\}; \{\iota, sr\}; \{s\ell, sr\}; \{s, \ell\}; \{s, r\}; \{\ell, r\}\};$$

— *клас односторонньо-симетричних квазігруп в інших випадках.*

Доведення. Покажемо, що узагальнена тотожність (49) парастрофно-рівносильна точно одній із тотожностей односторонньо-симетричних квазігруп, напівсиметричних квазігруп та тотожності всіх квазігруп. Інакше кажучи, при будь-яких значеннях параметрів τ, σ із S_3 тотожність (49) визначає многовид, який парастрофний одному із многовидів, що визначені тотожностями $xy = yx$, $xy{\cdot}x = y$ та тотожності тривіальної квазігрупи. До того ж, зазначені многовиди належать до різних пучків, тобто вони попарно не парастрофні між собою.

Оскільки многовиди маємо визначити з точністю до парастрофності, то заміну функційної змінної $(\cdot)$ будемо робити не лише використовуючи первинні тотожності, а і замінюватимемо її на довільний парастроф.

Якщо $\tau = \sigma \in S_3$ в (49), то маємо клас тривіальних квазігруп. Надалі розглянемо випадок, коли $\tau \neq \sigma$. З теореми 6. випливає, що досить розглянути в одній частині тотожності $\tau = \iota$, а в іншій всі парастрофи. Якщо $\sigma = s$ маємо тотожність $xy = yx$, яка за означенням визначає клас односторонньо-симетричних квазігруп.

Якщо $\tau = \iota$ та $\sigma = \ell$, то за означенням лівого ділення маємо тотожність $xy \cdot y = x$. Згідно з результатом Ш. Стейна, тотожності $xy{\cdot}y = x$ і $xy = yx$ визначають парастрофні многовиди, тому вони парастрофно-рівносильні.

Якщо $\tau = \iota$ та $\sigma = r$, то за означенням правого ділення маємо тотожність $x \cdot xy = y$. Згідно з результатом Ш. Стейна, тотожності $x \cdot xy = y$ і $xy = yx$ визначають парастрофні многовиди, тому вони парастрофно-рівносильні.

Якщо $\tau = \iota$ та $\sigma = s\ell$, то за означенням спочатку комутування, а потім лівого ділення маємо тотожність $xy \cdot x = y$, яка визначає клас напівсиметричних квазігруп.

Якщо $\tau = \iota$ та $\sigma = sr$, то за означенням спочатку комутування, а потім правого ділення маємо тотожність $x \cdot yx = y$, яка рівносильна тотожності $xy \cdot x = y$.

Щоб отримати всі множини парастрофів для тотожностей, які визначають клас напівсиметричних квазігруп, досить перейти в тотожності до σ^{-1}-парастрофа. Наприклад, за основну множину візьмемо $\{\iota, s\ell\}$, тоді обчислимо множини для всіх парастрофів. Для ι маємо цю ж саму множину. Для s-парастрофа — $\{\iota, s\ell\}s^{-1} = \{\iota, s\ell\}s = \{s, s\ell s\} = \{s, r\}$. Для r-парастрофа маємо $\{\iota, s\ell\}r^{-1} = \{\iota, s\ell\}r = \{r, s\ell r\} = \{r, \ell\}$. Для ℓ-парастрофа — $\{\iota, s\ell\}\ell^{-1} = \{\iota, s\ell\}\ell = \{\ell, s\ell\ell\} = \{\ell, s\}$. Для $s\ell$-парастрофа маємо:

$$\{\iota, s\ell\}(s\ell)^{-1} = \{\iota, s\ell\}sr = \{sr, s\ell sr\} = \{sr, \iota\}.$$

Для sr-парастрофа маємо $\{\iota, s\ell\}(sr)^{-1} = \{\iota, s\ell\}s\ell = \{s\ell, s\ell s\ell\} = \{s\ell, sr\}$.

Для всіх інших множин парастрофів отримуємо тотожності, які визначають клас односторонньо-симетричних квазігруп.

Оскільки група симетрій многовида одностороньо-симетричних квазігруп складається з трьох елементів, а група симетрії напівсиметричних квазігруп з одного елемента, тому ці класи парастрофно-нерівносильні. □

Теорема 10. *Клас многовидів квазігруп, який визначається узагальненою тотожністю* (50) *з точністю до парастрофної рівносильності має два різних пучки многовидів:*
— клас односторонніх луп, якщо $\nu = \pi$ або $\nu = s\pi$, де $\pi \in S_3$;
— клас двосторонніх луп в інших випадках.

Доведення. При описанні тотожностей (50), користуємося первинними тотожнотями (1). Згідно з наслідком 11. та означенням 8., досить розглядати тотожності з (50), які мають вигляд $x \overset{\pi^{-1}\nu}{\cdot} x = y^2$. Звідси при $\pi^{-1}\nu \in \{\iota, s\}$, отримуємо тотожність, яка визначає клас односторонніх луп (див. табл. 1.3). При $\pi^{-1}\nu \in \{\ell, s\ell\}$ маємо тотожність ліво-середньої лупи. Якщо $\pi^{-1}\nu \in \{r, sr\}$, то отримуємо тотожність право-середньої лупи, тобто яка визначає клас двосторонніх луп (див. табл. 1.3).

Отже всього різних два пучки многовидів. Справді, нехай маємо квазігрупу $(\mathbb{Z}_5; \star)$, яка визначена $x \star y := 2x + 3y$. Вона задовольняє тотожність односторонніх луп, а саме, тотожність середньо-симетричних луп та не задовольняє жодну тотожність з пучка двосторонніх луп. Справді, виберемо довільну пару чисел, наприклад, $(1; 2)$, підставимо в кожну тотожність, яка визначає пучок двосторонніх луп, в результаті отримаємо протиріччя. □

Теорема 11. *Клас многовидів квазігруп, який визначається узагальненою тотожністю* (51) *з точністю до парастрофної рівносильності має два різних пучки парастрофних многовидів:*
— клас всіх квазігруп, якщо $\delta = \rho \in S_3$ або якщо $\delta \neq \rho$ при $\delta^{-1}\rho = s$;
— клас квазігруп, який визначається тотожністю $x^2 \cdot x = x$ в інших випадках.

Доведення. Ця теорема випливає з теореми 8. тому, що многовид квазігруп, який визначається тотожністю $x \cdot x^2 = x$ є s-парастрофним многовидом до многовида, який визначається тотожністю $x^2 \cdot x = x$. За означенням ці многовиди належать одному пучку многовидів. $\square$

Підсумковим результатом класифікації тотожностей довжини два з точністю до парастрофної рівносильності є така теорема.

Теорема 12. *Будь-яка квазігрупова тотожність довжини 2 рівносильна точно одній із таких 14 тотожностей та парастрофно-рівносильна точно одній із 6 тотожностей, що мають різні цифри:*

$$\begin{array}{llll}
1)\ \ x = x, & 2)\ \ xy \cdot x = y, & & \\
3)\ \ xy = yx, & 4)\ \ x^2 = y^2, & 5)\ \ x^2 \cdot y = y, & 6)\ \ x^2 \cdot x = x, \\
{}^{\ell}3)\ \ x \cdot xy = y, & {}^{\ell}4)\ \ (x \overset{\ell}{\cdot} x)y = y, & {}^{s}5)\ \ x \cdot y^2 = x, & {}^{s}6)\ \ x \cdot x^2 = x, \\
{}^{r}3)\ \ xy \cdot y = x, & {}^{r}4)\ \ x(y \overset{r}{\cdot} y) = x, & {}^{\ell}5)\ \ x(y \overset{\ell}{\cdot} y) = x, & {}^{\ell}6)\ \ x(x \overset{\ell}{\cdot} x) = x.
\end{array}$$

Доведення. Ця теорема є узагальнюючим наслідком з теорем 9., 10., 11.. Доведення рівносильності та парастрофної рівносильності тотожностей довжини 2 очевидне.

Залишається встановити, що всі 6 пучків многовидів різні. Два пучки тотально-симетричні, а саме, клас всіх квазігруп та клас напівсиметричних квазігруп. Вони очевидно різні, оскільки напівсиметричні квазігрупи існують. Чотири пучки односторонньо-симетричні, покажемо, що вони теж різні. Для цього побудуємо табл., в якій вкажемо приклад, що відрізняє один многовид від іншого.

	$x^2 = y^2$	$x^2 \cdot y = y$	$x^2 \cdot x = x$
$xy = yx$	$S_3 :\ x \circ y := xy$	$S_3 :\ x \circ y := yx^{-1}$	$\mathbb{Z}_7 :\ x \circ y := 3x + 5y$
$x^2 = y^2$	$\times$	$\mathbb{Z}_5 :\ x \circ y := 2x + 3y$	$\mathbb{Z}_5 :\ x \circ y := 3x + 3y$
$x^2 \cdot y = y$	$\times$	$\times$	$\mathbb{Z}_5 :\ x \cdot y := 3x + 3y$

В групі S_3 виконуються тотожності $x^2 = y^2$ та $x^2 \cdot y = y$. Справді

$$(x \circ x) \circ y = y(x \circ x)^{-1} = y(x \cdot x^{-1})^{-1} = y.$$

Оскільки S_3 не комутативна, то жодна тотожність $xy = yx$, $xy \cdot y = y$, $x \cdot xy = y$ не виконується. Це означає, що пучки класів комутативних квазігруп та класів односторонніх, двосторонніх луп різні.

Аналогічно доводиться, що тотожність $x^2 \cdot x = x$ виконується в квазігрупі, яка визначена $x \circ y := 3x + 5y$ над $\mathbb{Z}_7$, а жодна тотожність комутативності, симетрії зліва та симетрії справа, не виконується. І так для всіх квазігруп, які наведені в цій табл.

Наприклад, тотожність $x^2 \cdot x = x$ виконується в квазігрупі, яка визначена $x \circ y := 3x + 3y$ над $\mathbb{Z}_7$, вона ідемпотентна, а тому не має ні лівого, ні правого, ні середнього елементів, а також ідемпотентні всі її парастрофи. А жодна тотожність для односторонніх та двосторонніх луп не виконується в цій квазігрупі тому, що вони мають односторонні елементи. Це означає, що тотожності з різних пучків парастрофно-нерівносильні, а самі пучки многовидів різні.

Отже, всі 14 многовидів квазігруп, які визначаються тотожностями довжини 2 різні. $\square$

З цієї теореми випливає такий наслідок.

Наслідок 13. *Всі квазігрупові узагальнені тотожності довжини 2 визначають 14 різних многовидів, які розподілені в 6 пучків за законом парастрофної симетрії. Серед яких: напівсиметричних та асиметричних пучків немає; 2 — тотально-симетричних:* 1), 2)*; 4 — односторонньо-симетричних:* 3), 4), 5), 6).

Зауважимо, що будь-яка тотожність довжини 2 визначає з точністю до парастрофно-первинної рівносильності точно один із таких пучків многовидів: 1) пучок всіх квазігруп; 2) напівсиметричних квазігруп; 3) комутативних квазігруп; 4) односторонніх луп; 5) двосторонніх луп; 6) пучок квазігруп, які визначаються тотожністю $x^2 \cdot x = x$.

Теорема 13. *Будь-яка квазігрупова тотожність довжини 3 рівносильна точно одній із таких 74 тотожностей та парастрофно-рівносильна точно одній із 20 тотожностей, що мають різні цифри:*

1) $x = y$	2) $x^2 = x$	3) $x^2 = x \wedge yx \cdot y = x$
4) $x^2 = x \wedge xy = yx,$	$^{\ell}4)$ $x^2 = x \wedge x \cdot xy = y,$	$^{r}4)$ $x^2 = x \wedge xy \cdot y = x,$
5) $x \cdot xy = yx,$	$^{s}5)$ $yx \cdot x = xy,$	$^{\ell}5)$ $x(y \cdot yx) = yx,$
$^{r}5)$ $(x \cdot xy)y = x,$	$^{s\ell}5)$ $y(yx \cdot x) = x,$	$^{sr}5)$ $(xy \cdot y)x = xy,$
6) $xy \cdot x = y \cdot xy,$	$^{\ell}6)$ $y(x \cdot yx) = x,$	$^{r}6)$ $(xy \cdot x)y = x,$
7) $yx \cdot xy = x,$	$^{\ell}7)$ $y(xy \cdot x) = x,$	$^{r}7)$ $(x \cdot yx)y = x,$
8) $x(x \cdot xy) = y,$	$^{s}8)$ $(yx \cdot x)x = y,$	$^{\ell}8)$ $x(yx \overset{\ell}{\cdot} y) = yx,$
9) $y(x \cdot xy) = x,$	$^{s}9)$ $(yx \cdot x)y = x,$	$^{\ell}9)$ $x(yx \cdot y) = yx,$
$^{r}9)$ $(x \cdot xy)x = y,$	$^{s\ell}9)$ $(xy \cdot x)x = y,$	$^{sr}9)$ $(x \cdot yx)y = yx,$
10) $x^2 \cdot xy = y,$	$^{s}10)$ $yx \cdot x^2 = y,$	$^{\ell}10)$ $xy \cdot yx = yx,$
$^{r}10)$ $x \cdot (x \overset{r}{\cdot} x)y = y,$	$^{s\ell}10)$ $xy \cdot yx = xy,$	$^{sr}10)$ $y(x \overset{\ell}{\cdot} x) \cdot x = y,$
11) $xy \cdot x^2 = y,$	$^{\ell}11)$ $x(yx \cdot y) = yx \cdot y,$	$^{r}11)$ $x(y \cdot xy) = x,$
12) $yx^2 \cdot y = x,$	$^{s}12)$ $y \cdot x^2y = x,$	$^{\ell}12)$ $xy \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} x) = y,$
$^{r}12)$ $x(yx \cdot y) = x,$	$^{s\ell}12)$ $(x \overset{r}{\cdot} x) \cdot yx = y,$	$^{sr}12)$ $(y \cdot xy)x = x,$
13) $xy^2 \cdot x = x,$	$^{s}13)$ $x \cdot y^2x = x,$	$^{\ell}13)$ $x^2(y \overset{\ell}{\cdot} y) = x,$
$^{r}13)$ $y \cdot x(x \overset{\ell}{\cdot} x) = y,$	$^{s\ell}13)$ $(y \overset{r}{\cdot} y)x^2 = x,$	$^{sr}13)$ $(x \overset{r}{\cdot} x)x \cdot y = y,$
14) $x^2x \cdot y = y,$	$^{s}14)$ $y \cdot xx^2 = y,$	$^{\ell}14)$ $y^2x \cdot x = x,$
$^{r}14)$ $(x \overset{r}{\cdot} x)(y \overset{\ell}{\cdot} y) = x,$	$^{s\ell}14)$ $x \cdot xy^2 = x,$	$^{sr}14)$ $(y \overset{r}{\cdot} y)(x \overset{\ell}{\cdot} x) = x,$
15) $xx^2 \cdot y = y,$	$^{s}15)$ $y \cdot x^2x = y,$	$^{\ell}15)$ $y^2(x \overset{\ell}{\cdot} x) = x,$
$^{r}15)$ $x \cdot x(y \overset{\ell}{\cdot} y) = x,$	$^{s\ell}15)$ $(x \overset{r}{\cdot} x)y^2 = x,$	$^{sr}15)$ $(y \overset{r}{\cdot} y)x \cdot x = x,$
16) $x^2 \cdot x^2 = x,$	$^{\ell}16)$ $x \cdot (x \overset{r}{\cdot} x)x = x,$	$^{r}16)$ $x(x \overset{\ell}{\cdot} x) \cdot x = x,$
17) $x^2x \cdot x = x,$	$^{s}17)$ $x \cdot xx^2 = x,$	$^{r}17)$ $(x \overset{r}{\cdot} x)(x \overset{\ell}{\cdot} x) = x,$
18) $xx^2 \cdot x = x,$	$^{s}18)$ $x \cdot x^2x = x,$	$^{\ell}18)$ $x^2(x \overset{\ell}{\cdot} x) = x,$
$^{r}18)$ $x \cdot x(x \overset{\ell}{\cdot} x) = x,$	$^{s\ell}18)$ $(x \overset{r}{\cdot} x)x^2 = x,$	$^{sr}18)$ $(x \overset{r}{\cdot} x)x \cdot x = x,$
19) $xy \cdot y = x \cdot xy,$	20) $xy \cdot yx = x.$	

Зауважимо, що тотожність 1) визначає пучок тривіальних квазігруп; 2) — пучок ідемпотентних квазігруп; 3) — пучок ідемпотентно-напівсиметричних квазігруп; 4) — пучок ідемпотентно-комутативних квазігруп; 10) — пучок IP-квазігруп з оборотним елементом x^2; 11) — пучок CIP-квазігруп з оборотним елементом x^2; 13) — пучок лівих луп з тотожністю $x^2e = x$; 14) — пучок лівих луп з тотожністю $x^2 \cdot x = e$; 15) — пучок лівих луп з тотожністю $x \cdot x^2 = e$, де e — нейтральний елемент лупи.

Тотожності 5), $^{r}5)$, $^{sr}5)$, 6), $^{r}6)$, 7), $^{r}7)$, $^{s}8)$, $^{s}9)$, $^{r}9)$, $^{s\ell}9)$, 19), 20) знайшов Т. Іванс [10], вивчаючи парастрофну ортогональність. При описанні мінімальних нетривіальних тотожностей, які теж спричинюють ортогональність парастрофів, тотожності 5), 6), 7), 8), 9), 19), 20) отримані В. Білоусовим [7]. Незалежно від нього, тотожності 5), 6), $^{r}6)$, 7), $^{s}8)$, $^{r}9)$, 19), 20) виділив Ф. Бенет [9]. Парастрофні тотожності 5), $^{s}5)$, $^{\ell}5)$,

${}^{r}5)$, ${}^{s\ell}5)$, ${}^{sr}5)$ описані Ш. Стейном [28]. Тотожність 5) відома як І закон Стейна, 6) — ІІ закон Стейна, 7) — ІІІ закон Стейна, 19) — І закон Шредера, 20) — ІІ закон Шредера. Тотожність 8) називатимемо І законом Білоусова, а тотожність 9) — ІІ законом Білоусова.

Доведення теореми 13. є сумарним наслідком результатів з теорем 4–7 з [16] та тверджень 6–20 з [16]. В цих теоремах та твердженнях сумарно всього многовидів отримано 75, два з них визначають один і той самий многовид ідемпотентних квазігруп, тому досить розглянути 74 многовиди. Всього різних тотожностей отримано 74. Оскільки кожна тотожність визначає многовид, то покажемо, що всі ці 74 многовиди різні. Віднімаючи повторення маємо, що різних пучків многовидів є 20. Тотожності, отримані з множини узагальнених тотожностей, не можуть бути парастрофно-рівносильними, якщо відповідні многовиди їх групи симетрій мають різну потужність. З наслідку 6 з [16] випливає, що досить показати, що многовиди відрізняються в середині кожного отриманого пучка. Крім того, покажемо різницю між многовидами, групи симетрій яких мають однакову потужність.

Серед всіх пучків п'ять — є тотально-симетричними, бо згідно з означенням всі парастрофи визначають один і той самий многовид, а саме 1) — многовид тривіальних квазігруп, 2) — многовид ідемпотентних квазігруп, 3) — многовид ідемпотентно-напівсиметричних квазігруп та 19), 20) — многовиди І та ІІ законів Шредера. Для кожної пари многовидів знайдено протиріччя, яке записано в такій таблиці.

	2)	3)	19)	20)
1)	тривіал.	тривіал.	тривіал.	тривіал.
2)	$\times$	$\mathbb{Z}_5: \ x \circ y := 2x + 4y$	$\mathbb{Z}_5: \ x \circ y := 2x + 4y$	$\mathbb{Z}_5: \ x \circ y := 2x + 4y$
3)	$\times$	$\times$	$\mathbb{Z}_{19}: \ x \circ y := 12x + 8y$	$\mathbb{Z}_{19}: \ x \circ y := 12x + 8y$
19)	$\times$	$\times$	$\times$	Іванс

Квазігрупи, які відрізняють один многовид від іншого для обох законів Шредера, тобто для 19) і 20), знайшов Т. Іванс [10]. Оскільки ідемпотентні квазігрупи, ідемпотентно-напівсиметричні квазігрупи існують, то тривіальні відрізняються від інших чотирьох. Квазігрупа, яка визначена відповідною рівністю в цій таблиці над відповідною групою, наприклад $\mathbb{Z}_5$ є ідемпотентною, а тому задовольняє тотожність ідемпотентності та не задовольняє жодного парастрофа кожної із тотожностей І закону Шредера, ІІ закону Шредера, одноелементних квазігруп та квазігруп, які визначаються системою тотожностей $x^2 = x \ \wedge \ yx \cdot y = x$. Квазігрупа $(\mathbb{Z}_{19}; \circ)$, яка визначена так: $x \circ y := 12x + 8y$ задовольняє $x^2 = x \ \wedge \ yx \cdot y = x$, а не задовольняє жодну парастрофну тотожність до тотожностей І закону Шредера, ІІ закону Шредера та одноелементних квазігруп. Це означає, що многовиди 1), 2), 3), 19), 20), які визначають тотально-симетричні многовиди попарно різні.

Розглянемо односторонньо-симетричні пучки многовидів: 4) — многовид ідемпотентно-комутативних квазігруп; 6) — многовид ІІ закону Стейна; 7) — многовид ІІІ закону Стейна; 8) — многовид І закону Білоусова; 11) — многовид CIP-квазігруп з оборотним елементом x^2, який визначається тотожністю $x \cdot (y \cdot x^2) = y$; 16) — многовид квазігруп, який визначається тотожністю $x^2 \cdot x^2 = x$; 17) — многовид квазігруп, який визначається тотожністю $(x^2 \cdot x)x = x$. Приклади квазігруп, які відрізняють один многовид від всіх парастофів іншого запишемо в таку таблицю:

	6)	7)	8)	11)	16)	17)
4)	$\mathbb{Z}_7:\ 4x+4y$	$\mathbb{Z}_5:\ 2x+3y$	$\mathbb{Z}_7:\ x+2y$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$
6)	$\times$	Білоусов	$\mathbb{Z}_7:\ x+2y$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$
7)	$\times$	$\times$	$\mathbb{Z}_7:\ x+2y$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$
8)	$\times$	$\times$	$\times$	$\mathbb{Z}_7:\ x+2y$	$\mathbb{Z}_7:\ x+2y$	$\mathbb{Z}_7:\ x+2y$
11)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\mathbb{Z}_7:\ 4x+4y$	$\mathbb{Z}_7:\ 4x+4y$
16)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\mathbb{Z}_7:\ 4x+5y$

Квазігрупи, які відрізняють многовиди II та III законів Стейна, тобто для 6) і 7) знайшов В. Д. Білоусов [7]. Група $\mathbb{Z}_3$ задовольняє тотожності $x\cdot(y\cdot x^2)=y$, $x^2\cdot x^2=x$, $(x^2\cdot x)x=x$, які визначають відповідно многовиди 11), 16), 17) і не задовольняють жодної парастрофної тотожності, які визначають пучки 4), 6), 7). Квазігрупа $(\mathbb{Z}_7;\circ)$, яка визначена рівністю $x\circ y:=4x+4y$, задовольняє систему тотожностей $x^2=x \quad\wedge\quad xy=yx$, та тотожності $x^2\cdot x^2=x$, $(x^2\cdot x)x=x$, які визначають відповідно многовиди 4), 16), 17) і не задовольняє жодної парастрофної тотожності, які визначають пучки 6) та 11). Квазігрупа $(\mathbb{Z}_7;\star)$, де $x\star y:=x+2y$, задовольняє I закон Білоусова-Бенета, яка визначає 8) і не задовольняє жодної парастрофної тотожності, які визначають пучки 4), 6), 7), 16), 17). Квазігрупа $(\mathbb{Z}_5;\circ)$, де $x\circ y:=2x+3y$, задовольняє II закон Білоусова-Бенета, яка визначає 4) і не задовольняє жодної парастрофної тотожності із пучка 7). Квазігрупа $(\mathbb{Z}_7;\circ)$, де $x*y:=4x+5y$, задовольняє $(x^2\cdot x)x=x$, яка визначає 17) і не задовольняє жодної парастрофної тотожності із пучка 16). Цим самим доводиться, що всі односторонньо-симетричні многовиди попарно різні.

Розглянемо асиметричні пучки многовидів: 5) — I закону Стейна; 9) — многовид II закону Білоусова; 10) — многовид IP-квазігруп з оборотним елементом x^2; 12) — многовид, який визначається тотожністю $(y\cdot x^2)\cdot y=x$; 13) — пучок лівих луп з тотожністю $x^2e=x$; 14) — пучок лівих луп з тотожністю $x^2\cdot x=e$; 15) — пучок лівих луп з тотожністю $x\cdot x^2=e$, де e — нейтральний елемент лупи; 18) — многовид квазігруп, який визначається тотожністю $(x\cdot x^2)x=x$. Приклади квазігруп, які відрізняють один з многовидів пучка від всіх парастрофів многовиду іншого пучка, аналогічно запишемо в наступну таблицю:

	9)	10)	12)	13)	14)	15)	18)
5)	$(\mathbb{Z}_7;\diamond)$	$\mathbb{Z}_7:\ 5x+y$	$\mathbb{Z}_5:\ 2x+y$	$(\mathbb{Z}_{11};\circ)$	$(\mathbb{Z}_7;\star)$	$(\mathbb{Z}_7;*)$	$(\mathbb{Z}_{11};\circ)$
9)	$\times$	$(\mathbb{Z}_7;\diamond)$	$(\mathbb{Z}_7;\diamond)$	$(\mathbb{Z}_{11};\circ)$	$(\mathbb{Z}_7;\star)$	$(\mathbb{Z}_7;*)$	$(\mathbb{Z}_{11};\circ)$
10)	$\times$	$\times$	$\mathbb{Z}_3$	$(\mathbb{Z}_{11};\circ)$	$\mathbb{Z}_7:\ 5x+y$	$(\mathbb{Z}_7;*)$	$(\mathbb{Z}_{11};\circ)$
12)	$\times$	$\times$	$\times$	$(\mathbb{Z}_{11};\circ)$	$(\mathbb{Z}_7;\star)$	$(\mathbb{Z}_7;*)$	$(\mathbb{Z}_{11};\circ)$
13)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$(\mathbb{Z}_{11};\circ)$	$(\mathbb{Z}_{11};\circ)$	$\mathbb{Z}_7:\ 2x+2y$
14)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$(\mathbb{Z}_7;\star)$	$(\mathbb{Z}_{11};\circ)$
15)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$(\mathbb{Z}_{11};\circ)$

де $x\circ y:=8x+3y+1$, $x*y:=3x+y$, $x\star y:=2x+y$, $x\diamond y:=6x+2y$. Квазігрупа $(\mathbb{Z}_{11};\circ)$ задовольняє тотожності $xy^2\cdot x=x$ і $(x^2\cdot x)x=x$, які визначають відповідно многовиди 13) і 18), але не задовольняє жодної парастрофної тотожності, які визначають всі інші пучки цієї таблиці. Між собою пучки многовидів 13) і 18) теж різні, бо квазігрупа $(\mathbb{Z}_7;\circ)$, де $x\circ y:=2x+2y$, задовольняє тотожність $(x^2\cdot x)x=x$ і не задовольняє жодної парастрофної тотожності до тотожності $xy^2\cdot x=x$. Квазігрупа $(\mathbb{Z}_7;\star)$ задовольняє тотожність $(x^2\cdot x)y=y$, яка визначає многовид 14), але не задовольняє жодну парастофну тотожність, яка визначає пучки 5), 9), 10), 12), 15). Квазігрупа $(\mathbb{Z}_7;\star)$ задовольняє тотожність $(x\cdot x^2)y=y$, яка визначає многовид 15), але не задовольняє жодну парастофну тотожність, яка визначає пучки 5), 9), 10), 12). Квазігрупа $(\mathbb{Z}_{11};\diamond)$ задовольняє тотожність II закону Білоусова-Бенета $y(x\cdot xy)=x$, яка визначає многовид 9), але не задовольняє жодну парастофну тотожність, яка визначає пучки 5), 10), 12). Група $\mathbb{Z}_3$ задовольняє тотожність $x^2\cdot xy=y$ і не задовольняє жодну парастрофну тотожність з $(y\cdot x^2)\cdot y=x$. Квазігрупа $(\mathbb{Z}_7;\cdot)$, де $x\cdot y:=5x+y$, задовольняє тотожність $x^2\cdot xy=y$, яка визначає многовид 10), але не задовольняє жодну парастофну тотожність, яка визначає пучок 5). Квазігрупа $(\mathbb{Z}_5;\bullet)$, де $x\bullet y:=2x+y$ задовольняє тотожність $(y\cdot x^2)\cdot y=x$, яка визначає многовид 12), але не задовольняє жодну парастофну тотожність, яка визначає пучок 5). Цим самим доводиться, що всі асиметричні многовиди попарно різні.

Отже, всі 74 многовиди різні. □

Наслідок 14. *Всі квазігрупові тотожності довжини 3 визначають 74 різні многовиди, які розподілені в 20 пучків за законом парастрофної симетрії. Серед яких: напівсиметричних пучків немає; тотально-симетричних п'ять:* 1), 2), 3), 19), 20)*; асиметричних вісім:* 5), 9), 10), 12), 13), 14), 15), 18)*; односторонньо-симетричних сім:* 4), 6), 7), 8), 11), 16), 17).

ВИСНОВКИ

У статті вивчаються функційні рівняння, тотожності та відповідні многовиди, що визначаються ними. Встановлено, що з точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує точно 1, 3, 4, 19 узагальнених нетривіальних функційних рівнянь без функційних і предметних сталих функційної довжини 1, 2, 3 та 4 відповідно; знайдено їх розв'язки на бінарних оборотних функціях довільної множини. За допомогою отриманого результату дано дві класифікації тотожностей довжини 2 і 3 на квазігрупах з точністю до рівносильності та парастрофної рівносильності. Доведено, що тотожності довжини 2 визначають 14 многовидів, а тотожності довжини 3 визначають 74 многовиди, які розподілені, згідно з парастрофною симетрією, в 6 та 20 пучків відповідно.

Подальшою перспективою дослідження є класифікація всіх тотожностей довжини 4 на квазігрупах з точністю до рівносильності та парастрофної рівносильності.

Література

[1] *Ацель Я., Домбр Ж.* Функциональные уравнения с несколькими переменными // Перевод с англ. — М.: Физматлит., 2003. — 432 с.

[2] *Aczél J.* Vorlesungen über Functionalgleichungen und ihre Anwendungen // VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin, 1961.— 331 p.

[3] *Aczél J.* Lectures on Functional Equations and their applications // New York and London: Academic Press. Series "Mathematics in Science and Engineering": in 19 vol., 1966. — 510 p.

[4] *Aczél J., Belousov V.D., Hosszú M.* Generalized associativity and bisymmetry on quasigroups // Acta. Math. Acad. Sci. Hung. — 11/1-2. — 1960. — C. 127–136.

[5] *Белоусов В.Д.* Ассоциативные системы квазигрупп // Успехи мат. наук. — 13, 3 (81). — 1958. — 243 с.

[6] *Белоусов В.Д.* Скрещенная изотопия квазигрупп // Квазигруппы и их системы, Кишинев: Штиинца. — 1990. — С. 14–20.

[7] *Белоусов В.Д.* Парастрофно-ортогональные квазигруппы // Препринт Акад. наук Молдавской ССР, Изд. Штиинца, Кишинев. — 1983. — 50 с.

[8] *Belousov V. D.* Parastrophic-orthogonal quasigroups // Quasigroups and Related Systems, 13. — 2005. — P. 25–72.

[9] *Benett F.E.* The spectra of a variets of quasigroups and related combinatorial designs // Descrete Mathematics, North-Holland, 77. — 1989. — P. 29–50.

[10] *Evans T.* Algebraic structures associated with Latin squares and orthogonal arrays // Proc. Conf. Algebraic Aspects of Combinatorics, Congressus Numerantium 13. — 1975. — P. 31–52.

[11] *Kannappan Pl.* Functional Equations and Inequalities with Applications // Springer Monographs in Mathematics. Boston, MA: Springer-Verlag US, 2009. — 810 p.

[12] *Коваль Р. Ф.* Класифікація квадратичних функційних рівнянь малої довжини на квазігрупах // Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — 2004. — № 5. — С. 111–127.

[13] *Коваль Р. Ф.* Класифікація функційних рівнянь малої довжини на квазігрупових операціях // дисер. на здобуття наук. ступ. канд. фіз.-мат. наук, Вінниця: ВДПУ імені Михайла Коцюбинського, 2005. — 133 с.

[14] *Крайнічук Г.В.* Класифікація та розв'язання квазігрупових функційних рівнянь типу (4;2) // Вісник Донецького національного університету, Сер. А: природничі науки. — N. 1–2. — 2015. — С. 53–63.

[15] *Крайнічук Г. В.* Класифікація квазігрупових функційних рівнянь типу $(3;3;0)$ // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. — 2016. — № 1/2. — С. 33–41.

[16] *Крайнічук Г. В.* Класифікація бінарних квазігрупових функційних рівнянь і тотожностей довжини три // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. — 2017. — № 1/2. — С. 37–66.

[17] *Krainichuk H., Sokhatsky F.* Solution and full classification of generalized binary functional equations of the type $(3;3;0)$ // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. — 2018. — № 2(87) — P. 41–53.

[18] *Krapež A., Živković D.* Parastrophically equivalent quasigroup equations // Publications de L'Institut Mathematique, Nouvelle serie. — 87(101). — 2010. — P. 39–58.

[19] *Krapež A., Simić S. K., Tošić D. V.* Parastrophically uncancellable quasigroup equations // Aequat. Mathem. — 79. — 2010. — P. 261–280.

[20] *Krapež A.* Cryptographically Suitable Quasigroups via Functional Equations // In: S. Markovski and M. Gusev (Eds.): ICT Innovations 2012, AISC 207, Springer Verlag Berlin Heidelberg. — 2013. — P. 265–274.

[21] *Krapež A.* Generalized quadratic quasigroup equations with three variables // Quasigroups Related Systems. — 2009. — Vol. 17. — P. 253–270.

[22] *Krstić S.* Quadratic quasigroup identities (Serbocroatian) // PhD thesis, University of Belgrade. — 1985.

[23] *Movsisyan Yu.M.* Hyperidentities and Related Concepts, I. Arm. J. Math. 2. — 2017. — P. 144–222.

[24] *Sade A.* Produit direct-singulier de quasigroupes orthogonaux et anti-abéliens. // Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sér. I, 74. — 1960. — P. 91–99.

[25] *Сохацький Ф.М.* Класифікація функційних рівнянь на квазігрупах // Український математичний журнал. — Т. 56. — N4. — 2004. — С. 1259–1266.

[26] *Sokhatsky F.M.* Parastrophic symmetry in quasigroup theory // Visnyk DonNU, seria A: natural Sciences. — N. 1–2. — 2016. — P. 70–83.

[27] *Sokhatsky F. M., Krainichuk H. V.* Solution of distributive-like quasigroup functional

equations // Comment. Math. Univ. Carolin. — 2012. — Vol. 53, № 3. — P. 447–459.
[28] *Stein Sh.K.* On the foundations of quasigroups // Trans. Amer. Soc. — 1957. — Vol.85. — N 1. — P. 228–256.
[29] *Чебан А.М.* Некоторые системы квазигрупп с обобщёнными тождествами // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.06. — Кишинёв, 1971. —85 с.
[30] *Shcherbacov V. A.* Elements of Quasigroup Theory and Applications // London: Chapman and Hall/CRC. Chapman and Hall/CRC. — 2017. — 576 p.

Krainichuk Halyna

*Senior Lecturer of the Department of Applied Mechanics and Computer Technologies,
Vasyl' Stus Donetsk National University*

CLASSIFICATION OF BINARY QUASIGROUP FUNCTIONAL EQUATIONS OF THE LENGTH FOUR

SUMMARY

In this paper, the generalized functional equations of length four are classified. It is established that up to parastrophically-primary equivalence the generalized non-trivial functional equations without functional and individual constants of functional length one, two, three, four exist exactly 1, 3, 4, 19 respectively; their solutions are found on binary invertible functions of an arbitrary set. In addition, classifications of quasigroup identities of lengths 2 and 3 are given and the corresponding varieties defined by them are described: examples of quasigroups that distinguish one variety from another are found.

Key words: *group, quasigroup, loop, invertible operation, parastrophe, isotope, identity, functional equation, parastrophically-primary equivalence.*

Крайничук Галина

*старший преподаватель кафедры прикладной механики и компютерных технологий,
Донецкий национальный университет имени Васыля Стуса*

КЛАССИФИКАЦИЯ БИНАРНЫХ КВАЗИГРУППОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛИНЫ ЧЕТЫРЕ

РЕЗЮМЕ

В этой статье классифицированы обобщенные функциональные уравнения длины четыре. Установлено, что с точностью к парастрофно-первичной эквивалентности существует точно 1, 3, 4, 19 обобщенных нетривиальных функциональных уравнений без функциональных и предметных сталых функциональной длины один, два, три, четыре соответственно; найдены их решения на бинарных обратимых функциях произвольного множества. Кроме этого, даны классификации квазигрупповых тождеств длины 2 и 3 и описаны соответствующие многообразия, которые определяются ими: найдены примеры квазигрупп, которые отличают одно многообразие от другого.

Ключевые слова: *группа, квазигруппа, лупа, обратимая операция, парастроф, изотоп, тождество, функциональное уравнение, парастрофно-первичная эквивалентность.*