УДК 512.548

Крайнічук (Шелепало) Г., Акопян А., Андреєва Ю.

[1] **старший викладач кафедри прикладної механіки і комп'ютерних технологій, Донецький національний університет імені Василя Стуса**

[2] **аспірант 2-го курсу кафедри математичного аналізу і диференціальних рівнянь, Донецький національний університет імені Василя Стуса**

[3] **студентка 1-го курсу факультету математики та інформаційних технологій, Донецький національний університет імені Василя Стуса**

ПРО ЗВІДНІСТЬ НЕСКОРОТНИХ УЗАГАЛЬНЕНИХ КВАДРАТИЧНИХ ФУНКЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

У цій статті показано, що всі нескоротні узагальнені квадратичні функційні рівняння від п'яти та шести різних незалежних предметних змінних розпадаються в системи рівнянь, кожне з яких має меншу кількість як предметних так і функційних змінних. Це означає, що всі такі рівняння звідні або парастрофно звідні.

Ключові слова: *квазігрупа, парастроф, тотожність, функційне рівняння, парастрофно-первинна рівносильність, звідість, скоротність.*

Вступ

Проблему класифікації парастрофно-нескоротних узагальнених квадратичних функційних рівнянь поставив Ф. М. Сохацький [7]. В рамках цієї проблеми сформульована низка задач, одна із яких присвячена встановленню скоротності, парастрофної скоротності квадратичних рівнянь від різної кількості незалежних предметних змінних. Парастрофно-нескоротних узагальнених квадратичних рівнянь від 2 та 3 різних незалежних предметних змінних існує точно по одному рівнянню відповідно:

$$F_1(x;y) = F_2(x;y), \qquad F_1(F_2(x;y);z) = F_3(x;F_4(y;z)).$$

Парастрофно-нескоротних узагальнених квадратичних рівнянь від чотирьох різних незалежних предметних змінних існує точно два [7]:

$$F_1(F_2(x;y);F_3(z;u)) = F_4(F_5(x;z);F_6(y;u)); \quad F_1(F_2(x;y);F_3(z;u)) = F_4(F_5(F_6(x;z);y);u).$$

Р. Коваль [3] довела, що усі парастрофно-нескоротні узагальнені квадратичні квазігрупові функційні рівняння від п'яти різних незалежних предметних змінних парастрофно-первинно-рівносильні одному з рівнянь:

$$F_1(F_2(F_3(x;y);F_4(z;u));v) = F_5(F_6(F_7(x;z);F_8(y;v);u); \tag{1}$$

$$F_1(F_2(F_3(x;y);F_4(z;u));v) = F_5(F_6(F_7(x;z);u);F_8(y;v)); \tag{2}$$

$$F_1(F_2(F_3(x;y);F_4(z;u));v) = F_5(F_6(F_7(x;z);v);F_8(y;u)); \tag{3}$$

$$F_1(F_2(F_3(x;y);F_4(z;u));v) = F_5(F_6(F_7(x;v);z);F_8(y;u)). \tag{4}$$

Її результат підтверджено Крапєжем з Сімічем та Тошічем [4] методом 3-зв'язних мульти-графів. Крім того, вони встановили, що парастрофно-нескоротних узагальнених квадратичних квазігрупових рівнянь від шести різних незалежних предметних змінних існує 14 рівнянь:

$$F_1(F_2(F_3(F_4(F_5(x,y),z),u),v),w) = F_6(x,F_7(y,F_8(z,F_9(u,F_{10}(v,w))))) \tag{5}$$

$$F_1(F_2(x,F_3(F_4(y,z),u)),F_5(v,w)) = F_6(F_7(x,y),F_8(F_9(z,F_{10}(u,v)),w)) \tag{6}$$

$$F_1(F_2(x,F_3(F_4(F_5(y,z),u),v)),w) = F_6(F_7(x,y),F_8(F_9(z,u),F_{10}(v,w))) \tag{7}$$

$$F_1(F_2(x,F_3(y,F_4(z,u))),F_5(v,w)) = F_6(F_7(F_8(x,y),z),(F_9(F_{10}(u,v),w))) \tag{8}$$

$$F_1(F_2(x,F_3(y,F_4(F_5(z,u),v))),w) = F_6(F_7(F_8(F_9(x,y),z),u),F_{10}(v,w)) \tag{9}$$

$$F_1(F_2(F_3(F_4(F_5(x,y),z),u),v),w) = F_6(y,F_7(z,F_8(u,F_9(v,F_{10}(w,x))))) \tag{10}$$

$$F_1(F_2(F_3(F_4(F_5(x,y),z),u),v),w) = F_6(x,F_7(y,F_8(z,F_9(v,F_{10}(u,w))))) \tag{11}$$

$$F_1(F_2(F_3(F_4(F_5(x,y),z),u),v),w) = F_6(x,F_7(y,F_8(u,F_9(z,F_{10}(v,w))))) \tag{12}$$

$$F_1(F_2(F_3(F_4(F_5(x,y),z),u),v),w) = F_6(x,F_7(z,F_8(y,F_9(v,F_{10}(u,w))))) \tag{13}$$

$$F_1(F_2(F_3(F_4(F_5(x,y),z),u),v),w) = F_6(y,F_7(z,F_8(u,F_9(w,F_{10}(v,x))))) \tag{14}$$

$$F_1(F_2(F_3(x,y),(F_4(z,u)),(F_5(v,w)))) = F_6(F_7(x,u),F_8(F_9(y,v),F_{10}(z,w))) \tag{15}$$

$$F_1(F_2(F_3(x,y),z),F_4(F_5(u,v),w)) = F_6(F_7(x,u),F_8(F_9(y,z),F_{10}(v,w))) \tag{16}$$

$$F_1(F_2(F_3(F_4(x,y),z),u),(F_5(v,w))) = F_6(x,F_7(y,F_8(F_9(z,v),F_{10}(u,w)))) \tag{17}$$

$$F_1(F_2(F_3(F_4(F_5(x,y),z),u),v),w) = F_6(x,F_7(F_8(F_9(y,v),F_{10}(z,w)),u)) \tag{18}$$

У цій статті доводиться, що кожне з рівнянь (1)–(4) та (5)–(18) розпадається в систему рівнянь від меншої кількості як функційних так і предметних змінних.

Метою даної статті є дослідження парастрофно-нескоротних узагальнених бінарних квадратичних квазігрупових функційних рівнянь від п'яти та шести різних незалежних предметних змінних та опис їх звідності в системи рівнянь від меншої кількості змінних.

Завдання даного дослідження: встановити звідність кожного парастрофно-нескоротного узагальненого бінарного квадратичного квазігрупового функційного рівняння від п'яти та шести різних незалежних предметних змінних.

1. Основні означення та результати

Бінарною операцією (двомісною функцією), яка визначена на деякій множині, є відображенням квадрату цієї множини в себе. Функція, що визначена на скінченній чи нескінченній множині, називається квазігруповою (оборотною), якщо вона оборотна по кожній своїй змінній.

Квазігрупа — алгебраїчна структура в абстрактній алгебрі, яка подібна до групи тим, що в ній завжди можливе ділення (інших властивостей групи квазігрупа немає).

Бінарна квазігрупа — це впорядкована пара $(Q;f)$, де Q — множина, f — бінарна операція, що визначена на цій множині, така, що кожне з рівнянь $f(a,y)=b$, $f(x,a)=b$ однозначно розв'язне для будь-якої пари елементів a, b із множини Q. Іншими словами, алгебра $(Q;f,{}^{\ell}f,{}^{r}f)$ називається *бінарною квазігрупою* [2] якщо виконуються такі тотожності:

$$f({}^{\ell}f(x;y);y)=x, \quad {}^{\ell}f(f(x;y);y)=x, \quad f(x;{}^{r}f(x;y))=y, \quad {}^{r}f(x;f(x;y))=y. \tag{19}$$

Під *функційним рівнянням* [1] розуміємо універсальну формулу рівності двох термів $\upsilon = \omega$, що складається з функційних та предметних змінних і не має ні предметних ні функційних сталих (уточнене означення див. [1]), при цьому носій Q вважається довільною множиною.

Два функційних рівняння $\upsilon = \omega$ називаються *парастрофно-первинно рівносильними* [7, 8, 1], якщо одне з іншого можна отримати за скінченну кількість таких кроків: 1) застосування квазігрупових тотожностей (19); 2) перестановка частин рівняння; 3) перейменування предметних змінних; 4) перейменування функційних змінних.

Функційне рівняння називається:

— *узагальненим*, якщо всі функційні змінні у рівнянні різні [4];

— *квадратичним*, якщо кожна предметна змінна має точно дві появи [5];

— *бінарним*, якщо всі функційні змінні є двомісними операціями [6];

— *квазігруповим*, якщо передбачається, що кожна функційна змінна набуває значень в множині квазігрупових операцій довільного носія [7].

Квазігрупове функційне рівняння називається *звідним* [8], якщо воно еквівалентне системі рівнянь, кожне з яких має меншу кількість предметних змінних. Квадратичне функційне рівняння називається *парастрофно-звідним*, якщо воно парастрофно-рівносильне звідному рівнянню.

Квадратичне квазігрупове функційне рівняння називається *скоротним*, якщо воно має самодостатню послідовність підслів (послідовність підслів рівняння називається *самодостатньою*, якщо вона містить всі появи її предметних змінних у рівнянні). Квадратичне квазігрупове функційне рівняння називається *парастрофно-скоротним*, якщо воно парастрофно-рівносильне скоротному рівнянню.

Теорема 1. *[8] Довільне квадратичне скоротне узагальнене рівняння є звідним. Довільне квадратичне парастрофно скоротне узагальнене рівняння є парастрофно звідним.*

2. Звідність рівнянь від п'яти предметних змінних

В цьому пункті доведено звідність парастрофно-нескоротних узагальнених квадратичних бінарних квазігрупових функційних рівнянь від п'яти різних незалежних предметних змінних. Таких рівнянь є чотири (1)–(4). Ці рівняння парастрофно-нескоротні, але звідні.

Теорема 2. *Нижченаведені твердження є істинними:*
1) функційне рівняння (1) *рівносильне такій системі рівнянь*

$$\begin{cases} F_2(F_3(x;y);F_4(z;u)) = \alpha^{-1}F_5(F_6(F_7(x;z);\beta y);u), \\ F_1(\alpha^{-1}F_5(F_6(z;\beta y);u);v) = F_5(F_6(z;F_8(y;v)),u); \end{cases}$$

2) функційне рівняння (2) *рівносильне такій системі рівнянь*

$$\begin{cases} F_1(\alpha^{-1}F_5(x;\beta y);v) = F_5(x;F_8(y;v), \\ F_2(F_3(x;y);F_4(z;u)) = \alpha^{-1}F_5(F_6(F_7(x;z);u);\beta y); \end{cases}$$

3) функційне рівняння (3) *рівносильне такій системі рівнянь*

$$\begin{cases} F_2(F_3(x;y);F_4(z;u)) = \alpha^{-1}F_5(F_6(\beta F_7(x;z);F_8(y;u), \\ F_1(\alpha^{-1}F_5(\beta x;y);v) = F_5(F_6(x;v);y); \end{cases}$$

4) функційне рівняння (4) *рівносильне такій системі рівнянь*

$$\begin{cases} F_1(\alpha^{-1}F_5(F_6(\beta x; z); y); v) = F_5(F_6(F_7(x; v); z); y), \\ F_2(F_3(x; y); F_4(z; u)) = \alpha^{-1}F_5(F_6(\beta x; z); F_8(u; y)). \end{cases}$$

Доведення кожного пункту теореми встановимо послідовно та окремо один від одного.

1) Нехай маємо квазігрупу $(Q; \cdot)$, яка задовольняє тотожність

$$f_1(f_2(f_3(x; y); f_4(z; u)); v) = f_5(f_6(f_7(x; z); f_8(y; v)); u). \tag{20}$$

Визначимо перетворення $\alpha t := f_1(t; a)$ та $\beta y := f_8(y; a)$ для деякого елемента $a \in Q$. Враховуючи ці перетворення, тотожність (20) при $v = a$ має вигляд:

$$\alpha f_2(f_3(x; y); f_4(z; u)) = f_5(f_6(f_7(x; z); \beta y); u).$$

Обидві частини цієї отриманої рівності домножимо на α^{-1}, в результаті матимемо:

$$f_2(f_3(x; y); f_4(z; u)) = \alpha^{-1}f_5(f_6(f_7(x; z); \beta y); u), \tag{21}$$

тобто отримаємо першу рівність із системи пункту 1).

Підставимо в (20) замість терма $f_2(f_3(x; y); f_4(z; u))$ знайдений для нього вираз і враховуючи визначене перетворення β, в результаті отримаємо:

$$f_1(\alpha^{-1}f_5(f_6(f_7(x; z); \beta y); u); v) = f_5(f_6(f_7(x; z); f_8(y; v)); u). \tag{22}$$

Позначимо $f_7(x; z) := t$, звідси $z = {}^r f_7(x; t)$. Отримане співвідношення для z підставимо в (22), тобто

$$f_1(\alpha^{-1}f_5(f_6(f_7(x; {}^r f_7(x; t)); \beta y); u); v) = f_5(f_6(f_7(x; {}^r f_7(x; t)); f_8(y; v)); u). \tag{23}$$

Із (23) скористаємося визначальною тотожністю для правого ділення операції f_7, а саме $f_7(x; {}^r f_7(x; t)) = t$, в результаті отримаємо

$$f_1(\alpha^{-1}f_5(f_6(t; \beta y); u); v) = f_5(f_6(t; f_8(y; v)); u), \tag{24}$$

тобто отримаємо другу рівність із системи пункту 1) теореми.

Навпаки, нехай виконується система пункту 1) теореми. Зокрема це означає, що виконується рівність (24). Підставимо замість змінної t терм $F_7(x; {}^r F_7(x; t))$, в результаті отримаємо (23). Замінивши ${}^r F_7(x; t))$ на z, матимемо рівність (22).

Оскільки рівність (21) має місце в системі пункту 1), то підставимо в (22) замість терма $\alpha^{-1}F_5(F_6(F_7(x; z); \beta y); u)$ ліву частину рівності (21). В результаті отримуємо тотожність (20), яка означає, що має місце рівняння (1).

2) Нехай маємо квазігрупу $(Q; \cdot)$, яка задовольняє тотожність

$$f_1(f_2(f_3(x; y); f_4(z; u)); v) = f_5(f_6(f_7(x; z); u); f_8(y; v)). \tag{25}$$

Використаємо такі перетворення, які визначаються так: $\alpha t := f_1(t; a)$ та $\beta y := f_8(y; a)$ для деякого елемента $a \in Q$.

Із врахуванням визначених перетворень тотожність (25) при $v = a$ має вигляд:

$$\alpha f_2(f_3(x; y); f_4(z; u)) = f_5(f_6(f_7(x; z); u); \beta y).$$

Звідси домноживши обидві частини на α^{-1}, отримаємо:

$$f_2(f_3(x;y);f_4(z;u)) = \alpha^{-1}f_5(f_6(f_7(x;z);u);\beta y), \tag{26}$$

тобто отримаємо другу рівність із системи пункту 2).

Підставимо в (25) замість терма $f_2(f_3(x;y);f_4(z;u))$ знайдений вираз, в результаті отримаємо

$$f_1(\alpha^{-1}f_5(f_6(f_7(x;z);u);\beta y);v) = f_5(f_6(f_7(x;z);u);f_8(y;v)). \tag{27}$$

Введемо заміну однакових підтермів, а саме $f_6(f_7(x;z);u) =: x$, тоді із (27) матимемо:

$$f_1(\alpha^{-1}f_5(x;\beta y);v) = f_5(x;f_8(y;v)), \tag{28}$$

тобто отримали першу рівність із системи пункту 2).

Навпаки, нехай виконується система пункту 2) теореми. Зокрема це означає, що виконується рівність (28). Підставимо замість змінної x терм $F_6(F_7(x;z);u)$ та отримаємо (27).

Оскільки рівність (26) має місце в системі пункту 2), то підставимо в (27) замість терма $\alpha^{-1}F_5(F_6(F_7(x;z);u);\beta y)$ ліву частину рівності (26). В результаті отримуємо тотожність (25), яка означає, що має місце рівняння (2).

3) Нехай маємо квазігрупу $(Q;\cdot)$, яка задовольняє тотожність

$$f_1(f_2(f_3(x;y);f_4(z;u));v) = f_5(f_6(f_7(x;z);v);f_8(y;u)). \tag{29}$$

Для деякого елемента $a \in Q$ визначимо перетворення $\alpha t := f_1(t;a)$ та $\beta u := f_6(u;a)$, використовуючи які при $v = a$, тотожність (29) матиме вигляд:

$$\alpha f_2(f_3(x;y);f_4(z;u)) = f_5(\beta f_7(x;z);f_8(y;u)).$$

Обидві частини отриманої рівності домножимо на α^{-1}, в результаті маємо:

$$f_2(f_3(x;y);f_4(z;u)) = \alpha^{-1}f_5(\beta f_7(x;z);f_8(y;u)), \tag{30}$$

тобто отримали першу рівність із системи пункту 3).

Підставимо в (29) замість терма $f_2(f_3(x;y);f_4(z;u))$ знайдений для нього вираз, в результаті отримуємо

$$f_1(\alpha^{-1}f_5(\beta f_7(x;z);f_8(y;u));v) = f_5(f_6(f_7(x;z);v);f_8(y;u)). \tag{31}$$

Оскільки квантори загальності по всіх предметних змінних, то введемо заміну однакових підтермів, а саме $f_7(x;z) = k$, $f_8(y;u) = m$, тому з (31) маємо

$$f_1(\alpha^{-1}f_5(\beta k;m);v) = f_5(f_6(k;v);m), \tag{32}$$

тобто отримуємо другу рівність із системи пункту 3) теореми.

Навпаки, нехай виконується система пункту 3). Зокрема це означає, що виконується рівність (32). Підставимо замість змінної k терм $F_7(x;z)$, а замість змінної m терм $F_8(y;u)$, в результаті матимемо рівність (31).

Оскільки рівність (30) має місце в системі пункту 3), то підставимо в (31) замість терма $\alpha^{-1}F_5(\beta F_7(x;z);F_8(y;u))$ ліву частину рівності (30). В результаті отримуємо тотожність (29), яка означає, що має місце рівняння (3).

4) Нехай маємо квазігрупу $(Q;\cdot)$, яка задовольняє тотожність

$$f_1(f_2(f_3(x;y);f_4(z;u));v) = f_5(f_6(f_7(x;v);z);f_8(y;u)). \tag{33}$$

Визначимо перетворення $\alpha t := f_1(t;a)$ та $\beta x := f_7(x;a)$ для деякого елемента $a \in Q$.
Із врахуванням визначених перетворень тотожність (33) при $v = a$ має вигляд:

$$\alpha f_2(f_3(x;y);f_4(z;u)) = f_5(f_6(\beta x;z);f_8(y;u)).$$

Звідси домножимо обидві частини на α^{-1}, отримаємо:

$$f_2(f_3(x;y);f_4(z;u)) = \alpha^{-1} f_5(f_6(\beta x;z);f_8(y;u)), \tag{34}$$

тобто отримали другу рівність із системи пункту 4).

Підставимо замість терма $f_2(f_3(x;y);f_4(z;u))$ знайдений вираз в (33) та отримаємо

$$f_1(\alpha^{-1} f_5(f_6(\beta x;z);f_8(y;u));v) = f_5(f_6(f_7(x;v);z);f_8(y;u)). \tag{35}$$

Оскільки квантори загальності по всіх предметних змінних, то використаємо заміну однакового підтерма $f_8(y;u) = t$., в результаті матимемо

$$f_1(\alpha^{-1} f_5(f_6(\beta x;z);t);v) = f_5(f_6(f_7(x;v);z);t), \tag{36}$$

тобто отримали першу рівність із системи пункту 4) теореми.

Навпаки, нехай виконується система пункту 4). Зокрема це означає, що виконується рівність (36). Підставимо замість змінної t терм $F_8(y;u)$, в результаті маємо (35).

Оскільки рівність (34) має місце в системі пункту 4), то підставимо в (35) замість терма $\alpha^{-1}F_5(F_6(\beta x;z);F_8(y;u))$ ліву частину (34). В результаті отримуємо тотожність (33), яка означає, що має місце рівняння (4).

Отже всі пункти теореми доведені. □

Наслідок 1. *Парастрофно-нескоротні узагальнені квадратичні квазігрупові функційні рівняння від п'яти різних незалежних предметних змінних* (1)–(4) *є звідними.*

Доведення випливає з результату Коваль про класифікацію парастрофно-нескоротних узагальнених квадратичних квазігрупових функційних рівнянь від п'яти різних незалежних предметних змінних та теореми 2. про звідність їх у системи рівнянь від меншої кількості як предметних так і функційних змінних. □

Теорема 3. *Усі узагальнені квадратичні квазігрупові функційні рівняння від п'яти різних незалежних предметних змінних є звідними.*

Доведення випливає з наслідку 1. та теореми 1. □

3. Звідність рівнянь від шести предметних змінних

В [4] доведено, що серед всіх узагальнених квадратичних бінарних квазігрупових функційних рівнянь від шести предметних змінних є 14 нескоротних рівнянь, а саме (5)–(18). Ми розглянули кожне з цих 14-ти рівнянь та встановили, що всі ці рівняння звідні, тобто розпадаються в систему рівнянь від меншої кількості як предметних так і функційних змінних.

Твердження 1. *Узагальнене нескоротне квадратичне бінарне квазігрупове функційне рівняння від шести різних незалежних предметних змінних виду* (5) *рівносильне такій системі рівнянь:*

$$\begin{cases} F_1(F_2(x;y);z) = \gamma F_2(x;\rho^{-1}F_{10}(y;z)), \\ \gamma F_2(F_3(x;y);\rho^{-1}z) = \delta F_3(x;\mu^{-1}F_9(y;z)), \\ \delta F_3(F_4(x;y);\mu^{-1}z) = \alpha F_4(x;\beta^{-1}F_8(y;z)), \\ \alpha F_4(F_5(x;y);\beta^{-1}z) = F_6(x;F_7(y;z)), \end{cases}$$

де $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mu,\rho$ *довільні підстановки базової множини.*

Доведення. Нехай маємо квазігрупу $(Q;\cdot)$, яка задовольняє тотожність

$$f_1(f_2(f_3(f_4(f_5(x,y),z),u),v),w) = f_6(x,f_7(y,f_8(z,f_9(u,f_{10}(v,w))))) \qquad (37)$$

Визначимо перетворення $\alpha t := f_1(f_2(f_3(t;a);a);a)$ та $\beta z := f_8(z;f_9(a;f_{10}(a;a)))$ для деякого елемента $a \in Q$. Із врахуванням визначених перетворень тотожність (37) при $u=v=w=a$ має вигляд: $\alpha f_4(f_5(x;y);z) = f_6(x;f_7(y;\beta z))$. В цій рівності замінимо z на $\beta^{-1}z$, отримаємо останню рівність із системи в умові твердження. Підставимо отримане значення замість терма $f_6(x;f_7(y;z))$ в тотожність (37), в результаті матимемо:

$$f_1(f_2(f_3(f_4(f_5(x,y),z),u),v),w) = \alpha f_4(f_5(x;y),\beta^{-1}f_8(z,f_9(u,f_{10}(v,w)))). \qquad (38)$$

Скориставшись першою тотожністю з (19) для операції f_5 з рівності (38) маємо

$$f_1(f_2(f_3(f_4(x,z),u),v),w) = \alpha f_4(x,\beta^{-1}f_8(z,f_9(u,f_{10}(v,w)))). \qquad (39)$$

Визначимо перетворення $\delta t := f_1(f_2(t;a);a)$ та $\mu u := f_9(u,f_{10}(a,a))$ для деякого елемента $a \in Q$, із врахуванням яких рівність (39) при $v=w=a$ має вигляд:

$$\delta f_3(f_4(x,z),u) = \alpha f_4(x,\beta^{-1}f_8(z,\mu u)).$$

Звідси здійснивши заміну u на $\mu^{-1}u$ отримуємо третю рівність із системи твердження. Підставимо отримане значення для терма $\alpha f_4(x,\beta^{-1}f_8(z,u)))$ в рівність (39):

$$f_1(f_2(f_3(f_4(x,z),u),v),w) = \delta f_3(f_4(x,z),\mu^{-1}f_9(u,f_{10}(v,w))).$$

Скориставшись першою тотожністю з (19) для операції f_4 в останній рівності маємо

$$f_1(f_2(f_3(x,u),v),w) = \delta f_3(x,\mu^{-1}f_9(u,f_{10}(v,w))). \qquad (40)$$

Визначимо перетворення $\gamma t := f_1(t;a)$, $\rho v := f_{10}(v,a)$ для будь-якого $a \in Q$ і з рівності (40) при $w=a$ маємо $\gamma f_2(f_3(x,u),v) = \delta f_3(x,\mu^{-1}f_9(u,\rho v))$, звідси отримуємо другу тотожність із системи шляхом заміни v на $\rho^{-1}v$. Підставивши отримане значення для терма $\delta f_3(x,\mu^{-1}f_9(u,v))$ в рівність (40), в результаті матимемо:

$$f_1(f_2(f_3(x,u),v),w) = \gamma f_2(f_3(x,u),\mu^{-1}f_{10}(v,w)). \qquad (41)$$

Використавши першу тотожністю з (19) для операції f_3 в (41) маємо першу рівність з системи твердження.

Навпаки, нехай виконується система з умови твердження. Зокрема це означає, що виконується перша тотожність із системи. Підставимо замість x вираз $f_3(x,u)$, в результаті отримаємо рівність (41). Підставимо замість змінної t терм $F_8(y;u)$, в результаті матимемо рівність (39). Оскільки рівність (38) має місце в системі пункту 4), то підставимо в (39) замість терма $\alpha^{-1}F_5(F_6(\beta x;z);F_8(y;u))$ ліву частину (38). В результаті отримуємо тотожність (37). □

Твердження 2. *Узагальнене нескоротне квадратичне бінарне квазігрупове функційне рівняння від шести різних незалежних предметних змінних виду* (6) *рівносильне такій системі рівнянь:*

$$\begin{cases} F_2(x;F_3(F_4(y;z);u)) = \alpha^{-1}F_6(F_7(x;y);\gamma F_9(z;\beta u)); \\ F_1(\alpha^{-1}F_6(x;\gamma F_9(z;\beta u));F_5(v;w)) = F_6(x;F_8(F_9(z;F_{10}(u,v));w)). \end{cases}$$

де α,β,γ *довільні підстановки базової множини.*

Доведення. Нехай маємо квазігрупу $(Q;\cdot)$, яка задовольняє тотожність

$$f_1(f_2(x;f_3(f_4(y;z);u));f_5(v;w)) = f_6(f_7(x;y);f_8(f_9(z;f_{10}(u,v));w)). \qquad (42)$$

Визначимо перетворення множини Q для деякого елемента $a\in Q$: $\alpha t := f_1(t;f_5(a;a))$, $\beta u := f_{10}(u;a)$, $\gamma t := f_8(t;a)$. При $v=w=a\in Q$ тотожність (42) має такий вигляд:

$$\alpha f_2(x;f_3(f_4(y;z);u)) = f_6(f_7(x;y);\gamma f_9(z;\beta u)).$$

Домножимо обидві частини на α^{-1}, отримаємо першу рівність системи із твердження.

Підставимо в (42) отриманий вираз для терма $f_2(x;f_3(f_4(y;z);u))$:

$$f_1(\alpha^{-1}f_6(f_7(x;y);\gamma f_9(z;\beta u));f_5(v;w)) = f_6(f_7(x;y);f_8(f_9(z;f_{10}(u,v));w)).$$

Скоротимо на терм $f_7(x;y)$, перепозначивши його на предметну змінну x, в результаті маємо другу рівність системи із твердження.

Отже, в результаті маємо систему з двох рівнянь, перше з яких має 4 предметні змінні, а друге 5 предметних змінних. Друге в свою чергу розпадається на систему рівнянь від меншої кількості предметних змінних, згідно теореми 3. Це означає, що вихідне рівняння від 6-ти предметних змінних – звідне.

Навпаки, очевидно, коли підставити рівняння системи із твердження, отримаємо тотожню рівність (42). □

Твердження 3. *Узагальнене нескоротне квадратичне бінарне квазігрупове функційне рівняння від шести різних незалежних предметних змінних виду* (7) *рівносильне такій системі рівнянь:*

$$\begin{cases} F_2(x;F_3(F_4(F_5(y;z);u);v)) = \alpha^{-1}F_6(F_7(x;y);F_8(F_9(z;u);\beta v)); \\ F_1(\alpha^{-1}F_6(x;F_8(z;\beta v));w) = F_6(x;F_8(z;F_{10}(v;w))). \end{cases}$$

де α,β *– довільні підстановки базової множини.*

Доведення. Нехай маємо квазігрупу $(Q;\cdot)$, яка задовольняє тотожність

$$f_1(f_2(x;f_3(f_4(f_5(y;z);u);v));w) = f_6(f_7(x;y);f_8(f_9(z;u);f_{10}(v;w))). \qquad (43)$$

Визначимо перетворення множини Q для деякого елемента $a\in Q$: $\alpha t := f_1(t;a)$, $\beta v := f_{10}(v;a)$. При $w=a\in Q$ тотожність (43) має такий вигляд:

$$\alpha f_2(x;f_3(f_4(f_5(y;z);u);v)) = f_6(f_7(x;y);f_8(f_9(z;u);\beta v)).$$

Домножимо обидві частини на α^{-1}, та отримаємо:

$$f_2(x;f_3(f_4(f_5(y;z);u);v)) = \alpha^{-1}f_6(f_7(x;y);f_8(f_9(z;u);\beta v)), \qquad (44)$$

тобто першу тотожність системи з твердження. Перша рівність системи з твердження зводиться до системи тотожностей від меншої кількості змінних згідно теореми 3..

Підставимо (44) в (43) замість визначених в (43) термів

$$f_1(\alpha^{-1}f_6(f_7(x;y);f_8(f_9(z;u);\beta v));w)=f_6(f_7(x;y);f_8(f_9(z;u);f_{10}(v;w))).$$

Скориставшись тотожностями (19), замінимо $f_9(z;u)$ на z, $f_7(x;y)$ на x, отримаємо:

$$f_1(\alpha^{-1}f_6(x;f_8(z;\beta v));w)=f_6(x;f_8(z;f_{10}(v;w))), \tag{45}$$

тобто другу тотожність системи з твердження.

Отже, в результаті маємо систему з двох рівнянь, одне з яких має 5 предметних змінних, а друге — 4 предметних змінних, тобто систему рівнянь від меншої кількості предметних змінних. Це означає, що рівняння (7) звідне.

Навпаки очевидно виконуються всі зворотні дії. □

Твердження 4. *Узагальнене нескоротне квадратичне бінарне квазігрупове функційне рівняння від шести різних незалежних предметних змінних виду* (8) *рівносильне такій системі рівнянь:*

$$\begin{cases} \beta^{-1}F_1(\alpha u;F_5(v;w))=F_9(F_{10}(u;v);w)), \\ f_1(F_2(x;F_3(y;F_4(z;u)));v))=F_6(F_7(F_8(x;y);z);\beta^{-1}F_1(\alpha u;v)). \end{cases}$$

де α,β *довільні підстановки базової множини.*

Доведення. Нехай маємо квазігрупу $(Q;\cdot)$, яка задовольняє тотожність

$$f_1(f_2(x;f_3(y;f_4(z;u)));f_5(v;w))=f_6(f_7(f_8(x;y);z);f_9(f_{10}(u;v);w)). \tag{46}$$

Визначимо перетворення множини Q для $\forall\ a\in Q$: $\alpha u := f_2(a;f_3(a;f_4(a;u)))$, $\beta t := f_6(f_7(f_8(a;a);a);t)$. При $x=y=z=a\in Q$ тотожність (46) має такий вигляд: $f_1(\alpha u;f_5(v;w))=\beta f_9(f_{10}(u;v);w))$. Домножимо обидві частини на β^{-1}, отримаємо:

$$\beta^{-1}f_1(\alpha u;f_5(v;w))=f_9(f_{10}(u;v);w)). \tag{47}$$

тобто першу тотожність системи з твердження. Підставимо (47) в (46):

$$f_1(f_2(x;f_3(y;f_4(z;u)));f_5(v;w))=f_6(f_7(f_8(x;y);z);\beta^{-1}f_1(\alpha u;f_5(v;w))).$$

Скориставшись тотожностями (19), замінимо $f_5(v;w)$ на v отримаємо:

$$f_1(f_2(x;f_3(y;f_4(z;u)));v))=f_6(f_7(f_8(x;y);z);\beta^{-1}f_1(\alpha u;v)). \tag{48}$$

тобто другу тотожність системи з твердження.

Отже, в результаті маємо систему з двох рівнянь, одне з яких має 3 предметних змінних, а друге — 5 предметних змінних, а згідно теореми 3.. Це означає, що рівняння (8) звідне. Навпаки очевидно виконуються всі зворотні дії. □

Твердження 5. *Узагальнене нескоротне квадратичне бінарне квазігрупове функційне рівняння від шести різних незалежних предметних змінних виду* (9) *рівносильне такій системі рівнянь:*

$$\begin{cases} F_2(x,F_3(y,F_4(F_5(z,u),v)))=\alpha^{-1}F_6(F_7(F_8(F_9(x,y),z),u),\beta v). \\ F_1(\alpha^{-1}F_6(x,\beta v),w)=F_6(x,F_{10}(v,w)). \end{cases}$$

де α,β *довільні підстановки базової множини.*

Доведення. Нехай маємо квазігрупу $(Q;\cdot)$, яка задовольняє тотожність

$$f_1(f_2(x, f_3(y, f_4(f_5(z, u), v))), w) = f_6(f_7(f_8(f_9(x, y), z), u), f_{10}(v, w)). \tag{49}$$

Визначимо перетворення множини Q для деякого елемента $a \in Q$: $\alpha t := f_1(t; a)$, $\beta v := f_{10}(v; a)$. При $w = a \in Q$ тотожність (49) має такий вигляд:

$$\alpha f_2(x, f_3(y, f_4(f_5(z, u), v))) = f_6(f_7(f_8(f_9(x, y), z), u), \beta v).$$

Домножимо обидві частини на α^{-1}, отримаємо:

$$f_2(x, f_3(y, f_4(f_5(z, u), v))) = \alpha^{-1} f_6(f_7(f_8(f_9(x, y), z), u), \beta v). \tag{50}$$

тобто першу тотожність системи з твердження. Підставимо (50) в (49):

$$f_1(\alpha^{-1} f_6(f_7(f_8(f_9(x, y), z), u), \beta v), w) = f_6(f_7(f_8(f_9(x, y), z), u), f_{10}(v, w)).$$

Скориставшись тотожностями (19), замінимо $f_7(f_8(f_9(x, y), z), u)$ на x отримаємо:

$$f_1(\alpha^{-1} f_6(x, \beta v), w) = f_6(x, f_{10}(v, w)), \tag{51}$$

тобто другу тотожність системи з твердження.

Отже, в результаті маємо систему з двох рівнянь, одне з яких має 3 предметних змінних, а друге — 5 предметних змінних, яке згідно теореми 3. звідне. Тому рівняння (9) звідне. Навпаки очевидно. □

Твердження 6. *Узагальнене нескоротне квадратичне бінарне квазігрупове функційне рівняння від шести різних незалежних предметних змінних виду* (10) *рівносильне такій системі рівнянь:*

$$\begin{cases} F_1(F_2(F_3(y; u); v); w) = F_6(\alpha F_8(F_9(F_{10}(x; w); v); u); F_5(x; \beta y)); \\ \qquad F_6(\alpha t; F_5(x; \beta y)) = F_6(F_7(t; z); F_5(x; F_4(y; z))). \end{cases}$$

де α, β *– довільні підстановки базової множини.*

Доведення. Нехай маємо квазігрупу $(Q;\cdot)$, яка задовольняє тотожність

$$f_1(f_2(f_3(f_4(f_5(x; y); z); u); v); w) = f_6(y; f_7(z; f_8(u; f_9(v; f_{10}(w; x))))).$$

В цій тотожності скористаємося комутуванням для операцій $f_6 - -f_{10}$ в правій частині тотожності, в результаті отримаємо:

$$f_1(f_2(f_3(f_4(f_5(x; y); z); u); v); w) = {}^s f_6({}^s f_7({}^s f_8({}^s f_9({}^s f_{10}(x; w); v); u); z); y).$$

В цій отриманій рівності перейменуємо кожну із операцій ${}^s f_6 - {}^s f_{10}$ відповідно на $f_6 - f_{10}$, в результаті матимемо

$$f_1(f_2(f_3(f_4(f_5(x; y); z); u); v); w) = f_6(f_7(f_8(f_9(f_{10}(x; w); v); u); z); y).$$

В цій тотожності замінимо $f_5(x; y)$ на y, а y на $f_5(x; y)$, матимемо:

$$f_1(f_2(f_3(f_4(y; z); u); v); w) = f_6(f_7(f_8(f_9(f_{10}(x; w); v); u); z); f_5(x; y)).$$

В останній рівності замінимо $f_4(y;z)$ на y, а y на $f_4(y;z)$, в результаті матимемо:

$$f_1(f_2(f_3(y;u);v);w) = f_6(f_7(f_8(f_9(f_{10}(x;w);v);u);z);f_5(x;f_4(y;z))). \tag{52}$$

Визначимо перетворення множини Q для деякого елемента $a \in Q$: $\alpha t := f_7(t;a)$, $\beta y := f_4(y;a)$. При $z = a \in Q$ тотожність (52) матиме такий вигляд:

$$f_1(f_2(f_3(y;u);v);w) = f_6(\alpha f_8(f_9(f_{10}(x;w);v);u);f_5(x;\beta y)),$$

тобто отримали перше рівняння системи з умови твердження.

Підставимо в (52) замість лівої частини тотожності отримане значення

$$f_6(\alpha f_8(f_9(f_{10}(x;w);v);u);f_5(x;\beta y)) = f_6(f_7(f_8(f_9(f_{10}(x;w);v);u);z);f_5(x;f_4(y;z))).$$

Скоротимо на однакові терми, а саме, замінимо терм $f_8(f_9(f_{10}(x;w);v);u)$ на змінну t, тобто

$$f_6(\alpha t;f_5(x;\beta y)) = f_6(f_7(t;z);f_5(x;f_4(y;z))).$$

Це означає, що отримали друге рівняння системи.

Навпаки очевидно. □

Твердження 7. *Узагальнене нескоротне квадратичне бінарне квазігрупове функційне рівняння від шести різних незалежних предметних змінних виду* (11) *рівносильне такій системі рівнянь:*

$$\begin{cases} F_1(F_2(F_3(F_4(x;z);u);v);w) = \alpha F_4(x;\beta^{-1}F_8(z;F_9(v;F_{10}(u;w)))); \\ \alpha F_4(F_5(x,y),\beta^{-1}z) = F_6(x;F_7(y,z)), \end{cases}$$

Доведення. Аналогічне доведенню твердження 5., а саме при $u = v = w = a \in Q$. □

Твердження 8. *Узагальнене нескоротне квадратичне бінарне квазігрупове функційне рівняння від шести різних незалежних предметних змінних виду* (12) *рівносильне такій системі рівнянь:*

$$\begin{cases} \alpha F_2(F_3(F_4(F_5(x;y);z);u);\beta^{-1}v) = F_6(x;F_7(y;F_8(u;F_9(z;v)))); \\ F_1(F_2(x;v);w) = \alpha F_2(x;\beta^{-1}F_{10}(v;w)), \end{cases}$$

де α,β *– довільні підстановки базової множини.*

Доведення. Нехай маємо квазігрупу $(Q;\cdot)$, яка задовольняє тотожність

$$f_1(f_2(f_3(f_4(f_5(x;y);z);u);v);w) = f_6(x;f_7(y;f_8(z;f_9(u;f_{10}(v;w))))). \tag{53}$$

Визначимо перетворення множини Q для деякого елемента $a \in Q$:

$$\alpha t := f_1(t;a), \quad \beta v := f_{10}(v;a).$$

При $w = a \in Q$ тотожність (53) має такий вигляд:

$$\alpha f_2(f_3(f_4(f_5(x;y);z);u);v) = f_6(x;f_7(y;f_8(u;f_9(z;\beta v)))).$$

В отриманій рівності замінимо v на $\beta^{-1}v$, матимемо:

$$\alpha f_2(f_3(f_4(f_5(x;y);z);u);\beta^{-1}v) = f_6(x;f_7(y;f_8(u;f_9(z;v)))), \tag{54}$$

тобто перше рівняння із системи твердження.

Підставимо (54) в (53) замість терма $f_6(x; f_7(y; f_8(u; f_9(z; v))))$:

$$f_1(f_2(f_3(f_4(f_5(x; y); z); u); v); w) = \alpha f_2(f_3(f_4(f_5(x; y); z); u); \beta^{-1} f_{10}(v; w)).$$

В отриманій рівності замінимо терм $f_3(f_4(f_5(x; y); z); u)$ на x, в результаті матимемо друге рівняння із системи твердження.

Навпаки очевидно. □

Твердження 9. *Узагальнене нескоротне квадратичне бінарне квазігрупове функційне рівняння від шести різних незалежних предметних змінних виду* (13) *рівносильне такій системі рівнянь:*

$$\begin{cases} \alpha F_2(F_3(F_4(F_5(x; y); z); \beta^{-1} u); v) = F_6(x; F_7(z; F_8(y; F_9(v; u)))); \\ F_1(F_2(F_3(x; u); v); w) = \alpha F_2(F_3(x; \beta^{-1} u); F_{10}(v; w)), \end{cases}$$

де α, β *– довільні підстановки базової множини.*

Доведення. Нехай маємо квазігрупу $(Q; \cdot)$, яка задовольняє тотожність

$$f_1(f_2(f_3(f_4(f_5(x; y); z); u); v); w) = f_6(x; f_7(z; f_8(y; f_9(v; f_{10}(u; w))))). \tag{55}$$

Визначимо перетворення множини Q для деякого елемента $a \in Q$:

$$\alpha t := f_1(t; a), \quad \beta u := f_{10}(u; a).$$

При $w = a \in Q$ тотожність (55) має такий вигляд:

$$\alpha f_2(f_3(f_4(f_5(x; y); z); u); v) = f_6(x; f_7(z; f_8(y; f_9(v; \beta u)))).$$

В отриманій рівності замінимо u на $\beta^{-1} u$, матимемо:

$$\alpha f_2(f_3(f_4(f_5(x; y); z); \beta^{-1} u); v) = f_6(x; f_7(z; f_8(y; f_9(v; u)))), \tag{56}$$

тобто перше рівняння із системи твердження.

Підставимо (56) в (55) замість терма $f_6(x; f_7(z; f_8(y; f_9(v; u))))$:

$$f_1(f_2(f_3(f_4(f_5(x; y); z); u); v); w) = \alpha f_2(f_3(f_4(f_5(x; y); z); \beta^{-1} u); f_{10}(u; w)).$$

В отриманій рівності замінимо терм $f_4(f_5(x; y); z)$ на x, в результаті матимемо друге рівняння із системи твердження.

Навпаки очевидно. □

Твердження 10. *Узагальнене нескоротне квадратичне бінарне квазігрупове функційне рівняння від шести різних незалежних предметних змінних виду* (14) *рівносильне такій системі рівнянь:*

$$\begin{cases} F_2(F_3(F_4(F_5(x; y); z); u); v) = \alpha^{-1} F_6(y; F_7(z; F_8(u; \beta F_{10}(v; x)))), \\ F_1(\alpha^{-1} F_6(y; F_7(z; F_8(u; \beta x))); w) = F_6(y; F_7(z; F_8(u; F_9(w; x)))), \end{cases}$$

де α, β *довільні підстановки базової множини.*

Доведення. Нехай маємо квазігрупу $(Q;\cdot)$, яка задовольняє тотожність

$$f_1(f_2(f_3(f_4(f_5(x;y);z);u);v);w) = f_6(y;f_7(z;f_8(u;f_9(w;f_{10}(v;x))))). \tag{57}$$

Визначимо перетворення множини Q для деякого елемента $a \in Q$:

$$\alpha t := f_1(t;a), \quad \beta t := f_9(a;t).$$

При $w = a \in Q$ тотожність (57) має такий вигляд:

$$\alpha f_2(f_3(f_4(f_5(x;y);z);u);v) = f_6(y;f_7(z;f_8(u;\beta f_{10}(v;x)))).$$

Домножимо і ліву і праву частини рівняння на α^{-1}, в результаті отримаємо

$$f_2(f_3(f_4(f_5(x;y);z);u);v) = \alpha^{-1} f_6(y;f_7(z;f_8(u;\beta f_{10}(v;x)))),$$

тобто перше рівняння із системи твердження.

Отриману рівність для терма $f_2(f_3(f_4(f_5(x;y);z);u);v)$ підставимо в (57):

$$f_1(\alpha^{-1} f_6(y;f_7(z;f_8(u;\beta f_{10}(v;x))));w) = f_6(y;f_7(z;f_8(u;f_9(w;f_{10}(v;x))))).$$

Звідси, в отриманій рівності замінимо терм $f_{10}(v;x)$ на x, в результаті матимемо

$$f_1(\alpha^{-1} f_6(y;f_7(z;f_8(u;\beta x)));w) = f_6(y;f_7(z;f_8(u;f_9(w;x)))),$$

тобто друге рівняння із системи твердження.

Навпаки очевидно. □

Твердження 11. *Узагальнене нескоротне квадратичне бінарне квазігрупове функційне рівняння від шести різних незалежних предметних змінних виду* (15) *рівносильне такій системі рівнянь:*

$$\begin{cases} F_2(F_3(x;y);F_4(z;u)) = \alpha^{-1} F_6(F_7(x;u);F_8(\beta y;\gamma z)), \\ F_1(\alpha^{-1} F_6(x;F_8(\beta y;\gamma z));F_5(v;w)) = F_6(x;F_8(F_9(y;v);F_{10}(z;w))), \end{cases}$$

де α, β, γ *довільні підстановки базової множини.*

Доведення. Аналогічне доведенню твердження 5., а саме при $v = w = a \in Q$. □

Твердження 12. *Узагальнене нескоротне квадратичне бінарне квазігрупове функційне рівняння від шести різних незалежних предметних змінних виду* (16) *рівносильне такій системі рівнянь:*

$$\begin{cases} F_2(F_3(x;y);z) = \alpha^{-1} F_6(\beta x;\gamma F_9(y;z)), \\ F_4(F_5(u;v);w) = \delta^{-1} F_6(\rho u;\mu F_{10}(v;w)), \\ F_1(\alpha^{-1} F_6(\beta x;\gamma y);\delta^{-1} F_6(\rho u;\mu v)) = F_6(F_7(x;u);F_8(y;v)), \end{cases}$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \rho$ *довільні підстановки базової множини.*

Доведення. Нехай маємо квазігрупу $(Q;\cdot)$, яка задовольняє тотожність

$$f_1(f_2(f_3(x;y);z);f_4(f_5(u;v);w)) = f_6(f_7(x;u);f_8(f_9(y;z);f_{10}(v;w))). \quad (58)$$

Визначимо перетворення множини Q для деякого елемента $c \in Q$:

$$\alpha t := f_1(t;f_4(f_5(c;c);c))), \quad \beta x := f_7(x;c), \quad \gamma t := f_8(t;f_{10}(c;c)).$$

При $u=v=w=c \in Q$ тотожність (58) має такий вигляд:

$$\alpha f_2(f_3(x;y);z) = f_6(\beta x;\gamma f_9(y;z)).$$

Домножимо обидві частини на α^{-1}, отримаємо першу рівність системи із твердження. Підставимо в (58) отриманий вираз для терма $f_2(f_3(x;y);z)$:

$$f_1(\alpha^{-1}f_6(\beta x;\gamma f_9(y;z));f_4(f_5(u;v);w)) = f_6(f_7(x;u);f_8(f_9(y;z);f_{10}(v;w))).$$

Скоротимо на терм $f_9(y;z)$, перепозначивши його на предметну змінну y, в результаті маємо

$$f_1(\alpha^{-1}f_6(\beta x;\gamma y);f_4(f_5(u;v);w)) = f_6(f_7(x;u);f_8(y;f_{10}(v;w))). \quad (59)$$

Визначимо перетворення множини Q для деякого елемента $a \in Q$:

$$\delta t := f_1(\alpha^{-1}f_6(\beta a;\gamma a);t), \quad \rho u := f_7(a;u), \quad \mu t := f_8(a;t).$$

При $x=y=a \in Q$ тотожність (59) має вигляд:

$$\delta f_4(f_5(u;v);w) = f_6(\rho u;\mu f_{10}(v;w)).$$

Домножимо обидві частини на δ^{-1}, отримаємо другу рівність системи із твердження. Підставимо в (59) отриманий вираз для терма $f_4(f_5(u;v);w)$:

$$f_1(\alpha^{-1}f_6(\beta x;\gamma y);\delta^{-1}f_6(\rho u;\mu f_{10}(v;w))) = f_6(f_7(x;u);f_8(y;f_{10}(v;w))).$$

Скоротимо на терм $f_{10}(v;w)$, перепозначивши його на предметну змінну v, в результаті отримаємо третю рівність із системи.

Отже, згідно теореми 3. вихідне рівняння (16) — звідне. Навпаки, очевидно, коли підставити рівняння системи із твердження, отримаємо тотожню рівність (58). □

Твердження 13. *Узагальнене нескоротне квадратичне бінарне квазігрупове функційне рівняння від шести різних незалежних предметних змінних виду* (17) *рівносильне такій системі рівнянь:*

$$\begin{cases} F_1(\alpha F_3(F_4(x;y);\beta^{-1}z) = F_6(x;F_7(y;z)), \\ F_1(F_2(F_3(x;z);u);F_5(v;w)) = F_1(\alpha F_3(x;F_8(\beta^{-1}F_9(z;v);F_{10}(u;w)))), \end{cases}$$

де α,β *довільні підстановки базової множини.*

Доведення. Аналогічне доведенню твердження 5., а саме при $u=v=w=a \in Q$. □

Твердження 14. *Узагальнене нескоротне квадратичне бінарне квазігрупове функційне рівняння від шести різних незалежних предметних змінних виду* (18) *рівносильне такій системі рівнянь:*

$$\begin{cases} F_2(F_3(F_4(F_5(x;y);z);u);v) = \alpha^{-1}F_6(x;F_7(F_8(F_9(y;w);\beta z);u)), \\ F_1(\alpha^{-1}F_6(x;F_7(F_8(y;\beta z);u));w) = F_6(x;F_7(F_8(y;F_{10}(z;w));u)), \end{cases}$$

де α, β *довільні підстановки базової множини.*

Доведення. Аналогічне доведенню твердження 5., а саме при $w = a \in Q$. □

Лема 1. *Всі 14 узагальнені нескоротні квадратичні бінарні квазігрупові функційні рівняння від шести предметних змінних звідні.*

Доведення є сумарним підсумком тверджень 1.–14. та теореми 1. □

Теорема 4. *Всі узагальнені квадратичні бінарні квазігрупові функційні рівняння від шести різних незалежних предметних змінних звідні.*

Доведення випливає з леми 1. та теореми 1. □

ВИСНОВКИ

Отже, всі квадратичні узагальнені бінарні квазігрупові функційні рівняння від $n \geqslant 5$ звідні, де n кількість різних незалежних предметних змінних. Залишається встановити чи будуть звідними парастрофно-нескоротні квадратичні узагальнені бінарні квазігрупові функційні рівняння $n < 5$.

Література

[1] *J. Aczél.* Lectures on functional equations and their applications // New York, London: Academic Press, 1966.

[2] *Белоусов В.Д.* Основы теории квазигрупп и луп. // М.: Наука, 1967. — 222 с.

[3] *Коваль Р.Ф.* Класифікація квадратичних парастрофно нескоротних функційних рівнянь від п'яти предметних змінних на квазігрупах // Український математичний журнал, 2005. — 57, №8.

[4] *Krapež A., Simić S. K., Tošić D. V.* Parastrophically uncancellable quasigroup equations // Aequat. Mathem., 79, 2010. — P. 261–280.

[5] *A. Krapež* Strictly quadratic functional equations on quasifroups // Publ. Inst. M.(Beograd). — no.29 (43), 1981. — P. 125–138.

[6] *Krapež A., Živković D.* Parastrophically equivalent quasigroup equations // Publications de L'Institut Mathematique, Nouvelle serie. — 87(101), 2010. — P. 39-58.

[7] *Сохацький Ф.М.* Класифікація функційних рівнянь на квазігрупах // Український математичний журнал, 2004. — 56, №9. — С. 1259-1266.

[8] *Сохацький Ф.М.* Асоціати і розклади багатомісних операцій // Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра і теорія чисел. Інститут математики НАН України, Київ, 2006.

[9] *F.M. Sokhatsky.* Parastrophic symmetry in quasigroup theory // Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences, no 1-2, 2016. — P. 70-83.

Krainichuk (Shelepalo) H., Akopyan A., Andreieva Yu.

[1] *Senior Lecturer in Department of Applied Mechanics and Computer Technologies, Vasyl' Stus Donetsk National University*
[2] *Post-graduate student of the 2nd year of the Department of Mathematical Analysis and Differential Equations, Vasyl' Stus Donetsk National University*
[3] *Student of the 1st course of the Faculty of Mathematics and Information Technologies, Vasyl' Stus Donetsk National University*

ON REDUCIBILIRY OF UNCANCELLABLE GENERALIZED QUADRATIC FUCNTIONAL EQUATIONS

SUMMARY

In this article, all uncancellable generalized quadratic functional equations from five and six different independent individual variables decomposed into systems of equations, each of which has a smaller number of both individual and functional variables, are shown. It means that all such equations are reducible or parastrophically reducible.

Key words: *quasigroup, parastrophe, identity, functional equation, parastrophically primary equivalence, reduciblity, cancellability.*

Крайничук (Шелепало) Г., Акопян А., Андреева Ю.

[1] *старший преподаватель кафедры прикладной механики и компьютерных технологий, Донецкий национальный университет имени Васыля Стуса*
[2] *аспирант 2-го курса кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, Донецкий национальный университет имени Васыля Стуса*
[3] *студентка 1-го курса факультета математики и информационных технологий Донецкий национальный университет имени Васыля Стуса*

О СВОДИМОСТИ НЕСОКРАТИМЫХ ОБОБЩЕННЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

РЕЗЮМЕ

В этой статье показано, что все несократимые обобщенные квадратические функциональные уравнения от пяти и шести различных независимых предметных переменных распадаются в системы уравнений, каждое из которых имеет меньшее количество как предметных, так и функциональных переменных. Это значит, что все такие уравнения сводимые или парастрофно-сводимые.

Ключевые слова: *квазигруппа, парастроф, тождество, функциональное уравнение, парастрофно-первичная эквивалентность, сводимость, сократимость.*