УДК 512.56(2-8)

Тарасевич А.В., Крайнічук Г.В.

[1] **аспірантка 2 курсу факультету програмування та комп'ютерних і телекомунікаційних систем, Хмельницький національний університет**

[2] **старший викладач кафедри прикладної механіки і комп'ютерних технологій, Донецький національний університет імені Василя Стуса**

ПРО КЛАСИФІКАЦІЮ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ДОВЖИНИ ТРИ НА ТЕРНАРНИХ КВАЗІГРУПАХ

У даній статті зведено вивчення всіх узагальнених функційних рівнянь від трьох функційних змінних на тернарних квазігрупах до дослідження 38 таких рівнянь з точністю до парастрофно-первинної рівносильності.

Ключові слова: *тернарна квазігрупа, функційне рівняння, парастрофно-первинна рівносильність.*

Вступ

Одним із методів вивчення розкладів багатомісних функцій є дослідження функційних рівнянь. При вивченні узагальнених функційних рівнянь не беруть до уваги залежність між самими функціями, адже вони між собою попарно різні. Наслідком класифікації узагальнених функційних рівнянь є опис тотожностей.

Дослідження узагальнених функційних рівнянь на двомісних оборотних функціях, тобто на бінарних квазігрупах, здійснено в багатьох працях, зокрема П. Каннаппаном [2], Р. Коваль [6, 16], Г. Крайнічук [8], А. Крапежем [9, 10], С. Крстичем [17], Ю. Мовсісяном [11], Ф. Сохацьким [13, 12, 14] та іншими.

До цього часу класифікацію узагальнених функційних рівнянь на тернарних квазігрупах з точністю до парастрофно-первинної рівносильності частково було анонсовано в тезах [3, 4, 19] та описано в статті [15], де виділено два класи тернарних функційних рівнянь довжини один та сім класів тернарних функційних рівнянь довжини два.

Метою даної статті є дослідження узагальнених тернарних квазігрупових функційних рівнянь довжини три з використанням методу класифікації рівнянь з точністю до парастрофно-первинної рівносильності.

Завдання даного дослідження — зведення усіх узагальнених тернарних квазігрупових функційних рівнянь довжини три до найменш можливої кількості функційних рівнянь парастрофно-первинними перетвореннями.

Дана стаття є продовженням вивчення функційних рівнянь на тернарних квазігрупах, основним результатом якої є така теорема:

Теорема 1. *З точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує не більше, як 38 узагальнених тернарних квазігрупових функційних рівнянь функційної довжини 3, які розділені на:*

предметний тип $(6,2,0,0)$ *— це рівняння:*

$$F_1(F_2(x,x,x),y,y) = F_3(x,x,x), \tag{1}$$

$$F_1(F_2(x,x,x),x,x) = F_3(x,y,y), \tag{2}$$

$$F_1(F_2(x,x,x),x,y) = F_3(x,x,y), \tag{3}$$

$$F_1(F_2(x,x,y),x,x) = F_3(x,x,y); \tag{4}$$

предметний тип $(5,3,0,0)$ *— це рівняння:*

$$F_1(F_2(y,y,y),x,x) = F_3(x,x,x), \quad (5)$$
$$F_1(F_2(x,x,x),x,y) = F_3(x,y,y), \quad (6)$$
$$F_1(F_2(x,x,x),y,y) = F_3(x,x,y), \quad (7)$$
$$F_1(F_2(x,y,y),x,x) = F_3(x,x,y), \quad (8)$$
$$F_1(F_2(x,x,y),x,y) = F_3(x,x,y); \quad (9)$$

предметний тип $(4,4,0,0)$ *— це рівняння:*

$$F_1(F_2(x,x,x),x,y) = F_3(y,y,y), \quad (10)$$
$$F_1(F_2(x,x,x),y,y) = F_3(x,y,y), \quad (11)$$
$$F_1(F_2(x,y,y),x,y) = F_3(x,x,y), \quad (12)$$
$$F_1(F_2(x,x,y),y,y) = F_3(x,x,y); \quad (13)$$

предметний тип $(4,2,2,0)$ *— це рівняння:*

$$F_1(F_2(y,y,z),x,z) = F_3(x,x,x), \quad (14)$$
$$F_1(F_2(y,y,z),x,x) = F_3(x,x,z), \quad (15)$$
$$F_1(F_2(x,x,x),y,y) = F_3(x,z,z), \quad (16)$$
$$F_1(F_2(x,x,x),y,z) = F_3(x,y,z), \quad (17)$$
$$F_1(F_2(x,y,y),x,z) = F_3(x,x,z), \quad (18)$$
$$F_1(F_2(x,y,y),x,x) = F_3(x,z,z), \quad (19)$$
$$F_1(F_2(x,x,y),x,z) = F_3(x,y,z), \quad (20)$$
$$F_1(F_2(x,x,y),y,z) = F_3(x,x,z); \quad (21)$$
$$F_1(F_2(x,x,y),z,z) = F_3(x,x,y); \quad (22)$$
$$F_1(F_2(x,y,z),x,x) = F_3(x,y,z); \quad (23)$$

предметний тип $(3,3,2,0)$ *— це рівняння:*

$$F_1(F_2(x,x,x),y,y) = F_3(y,z,z), \quad (24)$$
$$F_1(F_2(x,x,x),y,z) = F_3(y,y,z), \quad (25)$$
$$F_1(F_2(x,x,x),z,z) = F_3(y,y,y), \quad (26)$$
$$F_1(F_2(x,y,y),x,x) = F_3(y,z,z), \quad (27)$$
$$F_1(F_2(x,y,y),z,z) = F_3(x,x,y), \quad (28)$$
$$F_1(F_2(x,y,y),y,z) = F_3(x,x,z), \quad (29)$$
$$F_1(F_2(x,x,y),y,z) = F_3(x,y,z), \quad (30)$$
$$F_1(F_2(x,x,z),x,y) = F_3(y,y,z), \quad (31)$$
$$F_1(F_2(x,y,z),x,y) = F_3(x,y,z), \quad (32)$$
$$F_1(F_2(x,y,y),x,y) = F_3(x,z,z); \quad (33)$$

предметний тип $(8,0,0,0)$ *— це рівняння:*

$$F_1(F_2(x,x,x),x,x) = F_3(x,x,x). \quad (34)$$

предметний тип $(2,2,2,2)$ — *це рівняння:*

$$F_1(F_2(x,y,y),x,z)=F_3(z,u,u), \tag{35}$$
$$F_1(F_2(x,y,y),z,z)=F_3(x,u,u), \tag{36}$$
$$F_1(F_2(x,y,y),z,u)=F_3(x,z,u), \tag{37}$$
$$F_1(F_2(x,y,z),x,u)=F_3(y,z,u); \tag{38}$$

Доведення даної теореми наведене нижче в статті, яке складається з окремих пунктів, а саме класифікація за предметними типами функційних рівнянь.

1. Додаткові відомості

Для кращого розуміння викладеного дослідження нагадаємо основні означення та поняття.

Тернарною операцією f визначеною на множині Q називають зіставлення будь-якій впорядкованій трійці (q_1,q_2,q_3) елементів з Q точно одного елементу q з множини Q. Іншими словами, тернарна операція f — це відображення з Q^3 в Q, яке записують $f(q_1,q_2,q_3)=q$. Множину Q називають *носієм*.

Алгебра $(Q;f,{}^{(14)}f,{}^{(24)}f,{}^{(34)}f)$ є *тернарною квазігрупою* [15], якщо виконуються такі тотожності:

$$\left.\begin{array}{ll} f({}^{(14)}f(x,y,z),y,z)=x, & {}^{(14)}f(f(x,y,z),y,z)=x, \\ f(x,{}^{(24)}f(x,y,z),z)=y, & {}^{(24)}f(x,f(x,y,z),z)=y, \\ f(x,y,{}^{(34)}f(x,y,z))=z, & {}^{(34)}f(x,y,f(x,y,z))=z. \end{array}\right\} \tag{39}$$

Тотожності (39) називають *квазігруповими гіпертотожностями.*

Під *парастрофом* тернарної квазігрупи розуміють перестановку σ координатних появ предметних змінних шляхом заміни кожної впорядкованої четвірки (x,y,z,u) на $(x_{\sigma(1)},y_{\sigma(2)},z_{\sigma(3)},u_{\sigma(4)})$. Інакше кажучи, існує 24 операції для кожної тернарної оборотної операції, які визначають співвідношенням

$${}^{\sigma}f(x_{\sigma(1)},y_{\sigma(2)},z_{\sigma(3)})=u_{\sigma(4)} \iff f(x_1,y_2,z_3)=u_4,$$

називають *парастрофами* тернарної квазігрупи, а операцію ${}^{\sigma}f$ називають *σ-парастрофом* операції f.

У цій статті досліджуються функційні рівняння, які розглядаються на довільних множинах. А саме, нехай T_1 та T_2 терми, що мають функційні та предметні змінні, і не мають ні функційних, ні предметних сталих. Універсальну квантифіковану рівність $T_1=T_2$ називають *функційним рівнянням* (див.[1, 14]).

Кількість появ функційних змінних у рівнянні називають його *функційною довжиною* [7, 15].

Функційне рівняння називають *узагальненим* [5, 9, 18], якщо всі його функційні змінні попарно різні; *квазігруповим* [5, 9, 12], якщо всі його розв'язки розглядаються на оборотних операціях; *тривіальним* [16], якщо воно має лише одну появу однієї із предметних змінних; *тернарним* [19], якщо кожна функційна змінна є тернарною; *чистим* [13], якщо воно не має ні функційних, ні предметних сталих.

У функційному рівнянні можна здійснити ряд рівносильних перетворень, серед яких:

- *заміна сторін рівняння* (перетворення, при якому рівняння $\upsilon=\omega$ замінюють на $\omega=\upsilon$);

- *перейменування функційних змінних;*
- *перейменування предметних змінних.*

Лексикографічним розташуванням предметних змінних назвемо розташування зліва на право кожної нової предметної змінної в лексикографічному порядку.

Парастрофно-первинними перетвореннями рівняння називають:

- *Комутування*, а саме:
  - *(12)-комутуванням*, якщо робимо заміну терма $F(t_1, t_2, t_3)$ на терм ${}^{(12)}F(t_2, t_1, t_3)$;
  - *(13)-комутуванням*, якщо робимо заміну терма $F(t_1, t_2, t_3)$ на терм ${}^{(13)}F(t_3, t_2, t_1)$;
  - *(23)-комутуванням*, якщо робимо заміну терма $F(t_1, t_2, t_3)$ на терм ${}^{(23)}F(t_1, t_3, t_2)$.
- *Перетворення за зовнішнім діленням* — це перехід від рівності, яка має вигляд $F_1(s_1, s_2, s_3) = F_2(t_1, t_2, t_3)$ до однієї із трьох рівностей:

$$ {}^{(34)}F_1(s_1, s_2, F_2(t_1, t_2, t_3)) = s_3; $$

$$ {}^{(24)}F_1(s_1, F_2(t_1, t_2, t_3), s_3) = s_2; $$

$$ {}^{(14)}F_1(F_2(t_1, t_2, t_3), s_2, s_3) = s_1. $$

  Кожний з цих переходів називають відповідно: *зовнішнім діленням справа* операції F_1, *зовнішнім середнім діленням* F_1 та *зовнішнім діленням зліва* F_1.

- *Перетворення за внутрішнім діленням за змінною* x, а саме:
  - *правим діленням*, якщо робимо заміну підтерма $F(x, t_2, t_3)$ на x та водночас здійснимо заміну всіх інших появ змінної x підтермом ${}^{(34)}F(x, t_2, t_3)$, за умови, що x не має появ у підтермах t_2 та t_3;
  - *середнім діленням*, якщо підтерм $F(t_1, x, t_3)$ замінюємо на x і водночас на місце усіх інших появ змінної x підставляємо підтерм ${}^{(24)}F(t_1, x, t_3)$, за умови, що x не має появ у термах t_1 та t_3;
  - *лівим діленням*, якщо підтерм $F(t_1, t_2, x)$ замістимо x і водночас підставимо підтерм ${}^{(14)}F(t_1, t_2, x)$ на місце усіх інших появ змінної x, за умови, що x не має появ у термах t_1 та t_2.

Вищезгадані парастрофно-первинні перетворення тернарних функційних рівнянь описують квазігрупові гіпертотожності (39).

Два функційні рівняння *рівносильні*, якщо вони мають однакові розв'язки на кожному носієві.

Означення 1. ([12, 16]) *Два функційні рівняння називають парастрофно-первинно-рівносильними, якщо одне рівняння може бути отримане з іншого за скінченну кількість застосувань квазігрупових гіпертотожностей (39) та рівносильних перетворень: заміни сторін рівняння, перейменування змінних.*

2. Класифікація рівнянь функційної довжини три

У цій частині статті досліджено чисті узагальнені нетривіальні функційні рівняння від трьох функційних змінних на тернарних квазігрупах.

Визначальною функційною змінною терму $F(u_1, \dots, u_n)$ назвемо функційний символ F арності n.

Твердження 1. *Будь-яке узагальнене тернарне квазігрупове функційне рівняння функційної довжини три парастрофно-первинно-рівносильне рівнянню виду:*

$$F_1(F_2(t_1, t_2, t_3), t_4, t_5) = F_3(t_6, t_7, t_8), \tag{40}$$

де як кожна предметна змінна t_i, $i = \overline{1, 8}$, *так і кожна функційна змінна* F_j, $j = 1, 2, 3$, *розташовані в лексикографічному порядку.*

Доведення. Нехай $v = \omega$ — будь-яке узагальнене тернарне квазігрупове функційне рівняння функційної довжини три. Оскільки рівняння має три функційних змінних, позначимо їх F_1, F_2, F_3, то, враховуючи їх розташування лівіше один до одного, можливі такі випадки:
1) всі функційні змінні розташовані по одну сторону рівняння;
2) дві функційні змінні є в одній частині рівняння, а третя функційна змінна — в іншій частині рівняння.

У першому випадку можливе таке розташування дужок,

$$F_1(F_2(F_3(t_1, t_2, t_3), t_4, t_5), t_6, t_7) = t_8, \quad \text{або} \quad F_1(F_2(t_1, t_2, t_3), F_3(t_4, t_5, t_6), t_7) = t_8.$$

Обидва цих рівняння парастрофно-первинно рівносильні рівнянню, яке задовольняє умови другого пункту. А саме, перше рівняння зовнішнім діленням операції F_1 та перестановкою частин рівняння місцями, матиме вигляд $F_2(F_3(t_1, t_2, t_3), t_4, t_5) = {}^{(14)}F_1(t_8, t_6, t_7)$. Перейменуємо відповідно функційні та пердметні змінні, отримаємо (40). Друге рівняння зовнішнім діленням операції F_1, а саме: ${}^{(24)}F_1(F_2(t_1, t_2, t_3), t_8, t_7) = F_3(t_4, t_5, t_6)$. Аналогічно перейменуємо послідовно функційні змінні та предметні змінні, в результаті отримаємо (40).

Функційна змінна F_2 розташована на першому місці у лівому термі. Якщо це не так, то із врахуванням комутування перейдемо до відповідного парастрофа F_1. Зауважимо, що рівняння має лише один власний підтерм, і F_2 — є його визначальною змінною. Предметні змінні в кожному термі чи підтермі, який має визначальну змінну, розташовані в лексикографічному порядку. Якщо це не так, то здійснимо лексикографічне розташування відповідних предметних змінних. □

3. Предметні типи квазігрупових рівнянь

Пригадаємо, що *предметним типом* [8] функційного рівняння від n предметних змінних називають послідовність $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, де a_i — число появ його i-тої предметної змінної розташованої в лексикографічному порядку, а n — число всіх різних предметних змінних.

Твердження 2. *У будь-якому чистому тернарному квазігрупововому рівнянні функційної довжини три, яке має однакову кількість появ двох і більше незалежних предметних змінних лівіше буде розташована перша поява тієї змінної, число появ якої розташоване лівіше у предметному типі.*

Доведення випливає із твердження1. та означень: предметного типу функційного рівняння та лексикографічного розташування предметних змінних. Справді, якщо це не так, достатньо здійснити лексикографічне розташування відповідних предметних змінних та комутування підтермів. □

Лема 1. *Кожне чисте узагальнене нетривіальне тернарне функційне рівняння довжини три належить точно до одного з семи предметних типів:* $(8,0,0,0)$, $(6,2,0,0)$, $(5,3,0,0)$, $(4,4,0,0)$, $(4,2,2,0)$, $(3,3,2,0)$, $(2,2,2,2)$.

Доведення. Оскільки всі функційні змінні у рівнянні функційної довжини три є тернарними, то кількість предметних змінних дорівнює 8, враховуючи їх повторення. Оскільки рівняння квазігрупове і нетривіальне, то кожна предметна змінна повторюється щонайменше два рази, тому таке рівняння має не більше ніж чотири різні незалежні предметні змінні, тобто предметний тип (a, b, c, d), де $a, b, c, d > 1$ і $a + b + c + d = 8$. Занумеруємо предметні змінні так, що змінні в лексикографічному порядку мають незростаючу кількість своїх появ. Тому досить розглядати лише функційні рівняння із змінними x, y, z, u в яких x має a появ, y — b появ, z — c появ, а u має d появ, тобто лише рівняння типів (a, b, c, d), де $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant 2$ і $a + b + c + d = 8$. Ці умови задовольняють лише такі вибірки:

- якщо рівняння має одну незалежну предметну змінну, то його предметний тип $(8, 0, 0, 0)$;
- якщо рівняння з двома різними незалежними змінними, то його предметний тип такий: $(6, 2, 0, 0)$, $(5, 3, 0, 0)$, $(4, 4, 0, 0)$;
- якщо рівняння з трьома різними незалежними змінними, то його предметний тип може бути: $(4, 2, 2, 0)$, $(3, 3, 2, 0)$;
- якщо рівняння з чотирма різними незалежними змінними, то його предметний тип лише: $(2, 2, 2, 2)$. Отже, всього 7 різних предметних типів тернарних функційних рівнянь. □

Результати класифікації обнародувані в [4].

4. Класифікація рівнянь типу $(8, 0, 0, 0)$

Теорема 2. *Кожне чисте узагальнене тернарне квазігрупове функційне рівняння предметного типу* $(8, 0, 0, 0)$ *парастрофно-первинно-рівносильне точно одному функційному рівнянню (34).*

Доведення. З умови теореми випливає, що узагальнене тернарне функційне рівняння довжини три має одну незалежну предметну змінну, а згідно з лемою 1., його предметний тип $(8, 0, 0, 0)$ і предметна множина одноелементна. Оскільки рівняння має три функційних змінних, то можливе таке їх розташування:

1. всі функційні змінні є в одній частині рівняння;
2. дві функційні змінні розташовані в одній частині рівняння, а одна функційна змінна — в іншій.

У першому випадку можливе таке розташування дужок із врахуванням комутування та лексикографічного розташування функційних змінних:

$$F_1(F_2(F_3(x,x,x)x,x),x,x)=x, \quad F_1(F_2(x,x,x),F_3(x,x,x),x)=x.$$

До першого рівняння застосуємо зовнішнє ділення для операції ${}^{(14)}F_1$, в результаті отримаємо рівняння, в якому в одній частині рівняння одна функційна змінна, в другій частині рівняння — дві. Згідно з пунктом 1 та пунктом 3 твердження 1., отримаємо рівняння, яке парастрофно-первинно-рівносильне рівнянню (34). З другого рівняння після застосування зовнішнього середнього ділення операції F_1 отримаємо рівняння (34), отже, ці рівняння між собою теж парастрофно-первинно-рівносильні.

Другий випадок описує рівняння, які згідно твердження 1. парастрофно-первинно-рівносильні рівнянню (34). □

5. Класифікація рівнянь типу $(6,2,0,0)$

Лема 2. *Кожне чисте узагальнене тернарне квазігрупове функційне рівняння предметного типу* $(6,2,0,0)$ *парастрофно-первинно-рівносильне принаймні одному з чотирьох рівнянь: (1), (2), (3), (4).*

Доведення. Будь-яке узагальнене тернарне функційне рівняння предметного типу $(6,2,0,0)$ згідно з лемою 1. має дві незалежних предметних змінних, перша з яких має шість появ, а друга — дві появи. Відповідно до лексикографічного порядку розташування предметних змінних, нехай у рівнянні шість появ предметної змінної x та дві появи предметної змінної y. Згідно з твердженням 1., кожне з цих рівнянь має розташування дужок у вигляді формули (40).

Не втрачаючи загальності, припустимо, що всі появи предметної змінної y є у власному підтермі, тобто власний підтерм має вигляд: $F_2(u_1,u_2,u_3)$, де згідно з комутуванням та лексикографічним порядком змінних $u_1=x$, $u_2=u_3=y$, тобто отримали рівняння: $F_1(F_2(x,y,y),x,x)=F_3(x,x,x)$, в якому скористаємося зовнішнім діленням для операції F_1, отримаємо: ${}^{(14)}F_1(F_3(x,x,x),x,x)=F_2(x,y,y)$. В цьому рівнянні перейменуємо функційні змінні: $F_1:={}^{(14)}F_1$, $F_2:=F_3$, $F_3:=F_2$, отримаємо рівняння (2).

Нехай у власному підтермі предметна змінна y має одну появу, тоді з врахуванням комутування та лексикографічного порядку змінних з формули (40) маємо:

$$F_1(F_2(x,x,y),x,y)=F_3(x,x,x), \qquad F_1(F_2(x,x,y),x,x)=F_3(x,x,y).$$

Як в попередньому випадку, до першого рівняння застосуємо зовнішнє ділення операції ${}^{(14)}F_1$ та відповідне перейменування функційних змінних, в результаті отримаємо рівняння (3). Друге рівняння збігається з (4)

Нехай предметна змінна y не має жодної появи у власному підтермі, тоді рівнянь згідно з комутуванням та лексикографічним порядком змінних може бути три, які збігаються з (1), (2) та (3). □

6. Класифікація рівнянь типу $(5,3,0,0)$

Лема 3. *Кожне чисте узагальнене тернарне квазігрупове функційне рівняння предметного типу* $(5,3,0,0)$ *парастрофно-первинно-рівносильне принаймні одному з п'яти рівнянь: (5), (6), (7), (8), (9).*

Доведення. Будь-яке узагальнене тернарне функційне рівняння предметного типу $(5,3,0,0)$ згідно з лемою 1. має дві незалежних предметних змінних, перша з яких має п'ять появ, а друга — три появи. Відповідно до лексикографічного порядку розташування предметних змінних, нехай у рівнянні п'ять появ предметної змінної x та три появи предметної змінної y. Згідно з твердженням 1., кожне з цих рівнянь має розташування дужок у вигляді формули (40).

Нехай всі три появи предметної змінної y є у власному підтермі, тоді маємо рівняння (5).

Якщо дві появи предметної змінної y у власному підтермі, то предметна змінна x має появу у власному підтермі і розташована на першому місці, згідно лексикографічного порядку предметних змінних та комутування, тобто маємо рівняння:

$$F_1(F_2(x, y, y), x, y) = F_3(x, x, x), \qquad F_1(F_2(x, y, y), x, x) = F_3(x, x, y).$$

Друге рівняння збігається з (8). До першого рівняння застосуємо зовнішнє ділення операції ${}^{(14)}F_1$ та відповідне перейменування функційних змінних, в результаті отримаємо рівняння (6).

Якщо предметна змінна y має одну появу у власному підтермі, то згідно з комутуванням та лексикографічним порядком у формулі (40): $u_1 = u_2 = x$, а $u_3 = y$. Якщо інших дві появи предметної змінної y зліва, то маємо рівняння: $F_1(F_2(x, x, y), y, y) = F_3(x, x, x)$, для якого застосуємо зовнішнє ділення операції ${}^{(14)}F_1$ та відповідне перейменування функційних змінних, в результаті отримаємо рівняння (7). Якщо інших дві появи предметної змінної y справа, то маємо, враховуючи комутування та лексикографічний порядок, рівняння: $F_1(F_2(x, x, y), x, x) = F_3(x, y, y)$, для якого застосуємо зовнішнє ділення операції ${}^{(14)}F_1$ та відповідне перейменування функційних змінних, в результаті отримаємо рівняння (8). Якщо інших дві появи предметної змінної y знаходяться по різні сторони, то рівняння збігається (9).

Якщо власний терм немає жодної появи предметної змінної y, тоді у формулі (40): $u_1 = u_2 = u_3 = x$, тоді можливих таких три рівняння з врахуванням комутування та лексикографічного розташування змінних: $F_1(F_2(x, x, x), y, y) = F_3(x, x, y)$

$$F_1(F_2(x, x, x), x, y) = F_3(x, y, y), \qquad F_1(F_2(x, x, x), x, x) = F_3(y, y, y).$$

Перше і друге рівняння збігається з рівняннями (7) і (6) відповідно. Третє рівняння відповідно до зовнішнього ділення операції ${}^{(14)}F_1$ та відповідного перейменування функційних змінних парастрофно-первинно рівносильне рівнянню (5). □

7. Класифікація рівнянь типу $(4, 4, 0, 0)$

Лема 4. *Кожне чисте узагальнене тернарне квазігрупове функційне рівняння предметного типу* $(4, 4, 0, 0)$ *парастрофно-первинно-рівносильне принаймні одному з чотирьох рівнянь: (10), (11), (12), (13).*

Доведення. В будь-якому узагальненому тернарному функційному рівнянні предметного типу $(4, 4, 0, 0)$ згідно з лемою 1. є дві незалежних предметних змінних, кожна з яких має чотири появи. Нехай кожне з цих рівнянь має вигляд формули (40) і чотири появи предметної змінної x та чотири появи предметної змінної y. Оскільки узагальнене тернарне функційне рівняння предметного типу $(4, 4, 0, 0)$ має однакову кількість появ двох предметних змінних x та y, а тому згідно твердження 2. предметна змінна x розташована у власному підтермі і стоїть на першому місці згідно з формулою (40). Якщо це не так, то застосуємо комутування у власному підтермі, який набуде вигляду: $F_2(u_1, u_2, u_3)$, де $u_1 = x$, $u_2, u_3 \in \{x, y\}$.

Якщо $u_2 = u_3 = x$, то отримуємо два рівняння: (10) і (11).

Якщо $u_2 = u_3 = y$, то можливо побудувати три рівняння: (12) та

$$F_1(F_2(x,y,y),y,y) = F_3(x,x,x), \quad F_1(F_2(x,y,y),x,x) = F_3(x,y,y).$$

Рівняння (11) отримуємо з другого рівняння після застосування зовнішнього ділення зліва операції F_1 та перейменування відповідних функційних змінних. З останього рівняння після застосування перейменування предметних змінних відповідно до циклу (xy) та (13)-комутування у власному підтермі та термі з визначальною зміною F_3 отримаємо рівняння (13).

Якщо $u_2 \neq u_3$, то маємо три рівняння: (13) і

$$F_1(F_2(x,x,y),x,x) = F_3(y,y,y), \quad F_1(F_2(x,x,y),x,y) = F_3(x,y,y).$$

Застосуємо у першому з двох вищенаведених рівнянь зовнішнє ділення зліва операції F_1, перейменування предметних змінних відповідно до циклу (yx), перейменування відповідних функційних змінних та (13)-комутування у термі з визначальною змінною F_3, як результат, отримаємо рівняння (11). Парастрофно-первинна рівносильність між другим рівнянням та рівнянням (12) випливає із застосування зовнішнього ділення зліва операції F_1 та перейменування відповідних функційних змінних у другому рівнянні. □

8. Класифікація рівнянь типу $(4,2,2,0)$

Лема 5. *Кожне чисте узагальнене тернарне квазігрупове функційне рівняння предметного типу* $(4,2,2,0)$ *парастрофно-первинно-рівносильне принаймні одному з десяти рівнянь: (14) — (23).*

Доведення. З умови теореми випливає, що узагальнене тернарне функційне рівняння довжини три має три незалежних предметних змінних,одна з яких має чотири появи, а дві інших — по дві появи. Згідно з лемою 1., його предметний тип $(4,2,2,0)$, нехай у рівнянні чотири появи предметної змінної x та по дві появи предметних змінних y та z. Згідно з твердженням 1., кожне з цих рівнянь має розташування дужок у вигляді формули (40).

Розглянемо випадки коли власний підтерм не має x, тоді предметна змінна y стоїть на першому місці згідно твердження 2.. Якщо це не так, то застосуємо комутування у власному підтермі. Предметна змінна y точно розташована у даному підтермі, адже рівняння має по дві появи y і z, а змінна F_2 тернарна. Отже, власний підтерм має вигляд: $F_2(u_1,u_2,u_3)$, де $u_1 = y$, $u_2, u_3 \in \{y,z\}$.

Якщо $u_2 \neq u_3$, то маємо рівняння (14) і (15). Якщо $u_2 = u_3$, то маємо два рівняння:

$$F_1(F_2(y,z,z),x,y) = F_3(x,x,x), \quad F_1(F_2(y,z,z),x,x) = F_3(x,x,y).$$

Після взаємного перейменування y і z та (13)-комутування у власному підтермі із першого рівняння отримаємо рівняння (14), а з другого — рівняння (15).

Розглянемо випадки коли власний підтерм має лише одну змінну x, тоді вона знаходиться на першому місці, згідно лексикографічного порядку. Отже, у власному підтермі з формули (40): $u_1 = x$, $u_2, u_3 \in \{y,z\}$.

Якщо $u_2 = u_3 = y$, то маємо три рівняння: (18), (19) та

$$F_1(F_2(x,y,y),z,z) = F_3(x,x,x),$$

в якому взаємно перейменуємо змінні y та z і зовнішнім діленням операції ${}^{(14)}F_1$ та відповідного перейменування функційних змінних, отримаємо рівняння, яке парастрофно-первинно рівносильне (16).

Якщо $u_2 \neq u_3$, то маємо три рівняння: (17), (23) та

$$F_1(F_2(x,y,z),x,y) = F_3(x,x,z),$$

в якому взаємно перейменуємо змінні y та z і зовнішнім діленням операції ${}^{(14)}F_1$ та відповідного перейменування функційних змінних, отримаємо рівняння, яке парастрофно-первинно рівносильне (20).

Розглянемо випадки, коли власний підтерм має дві появи змінної x, тоді згідно з лексикографічним порядком у власному підтермі з формули (40): $u_1 = u_2 = x$, $u_3 \in \{y,z\}$. Якщо $u_3 = y$, то маємо п'ять рівнянь: (20), (21), (22) та

$$F_1(F_2(x,x,y),x,x) = F_3(y,z,z), \quad F_1(F_2(x,x,y),x,y) = F_3(x,z,z).$$

Перше рівняння парастрофно-первинно рівносильне рівнянню (15), а друге – рівнянню (18) за зовнішнім діленням операції ${}^{(14)}F_1$ та відповідного перейменування функційних змінних циклу (yz).

Нарешті випадок, коли власний підтерм складається з однієї предметної змінної, а саме змінної x, тобто $u_1 = u_2 = u_3 = x$, тоді маємо рівняння (16),(17) та:

$$\begin{aligned} F_1(F_2(x,x,x),x,y) &= F_3(y,z,z), \\ F_1(F_2(x,x,x),x,z) &= F_3(y,y,z), \\ F_1(F_2(x,x,x),z,z) &= F_3(x,y,y). \end{aligned}$$

Друге рівняння можна отримати з першого після перейменування предметних змінних відповідно до циклу (yz) та застосування (13)-комутування у термі з визначальною змінною F_3. Крім того із другого рівняння отримуємо рівняння (14), за умови застосування зовнішнього ділення зліва операції F_1 та перейменування відповідних функційних змінних. Третє рівняння, парастрофно-первинно-рівносильне рівнянню (16), бо його отримуємо з рівняння (16) після взаємного перейменування предметних змінних z й y. □

9. Класифікація рівнянь типу $(3,3,2,0)$

Лема 6. *Кожне чисте узагальнене тернарне квазігрупове функційне рівняння предметного типу* $(3,3,2,0)$ *парастрофно-первинно рівносильне принаймні одному з десяти рівнянь: (24) — (33).*

Доведення. В будь-якому узагальненому тернарному функційному рівнянні предметного типу $(3,3,2,0)$ згідно леми 1. є три незалежних предметних змінних, перші дві з яких мають по три появи, а третя – дві появи. Нехай кожне з цих рівнянь має вигляд формули (40) і три появи предметної змінної x, три появи предметної змінної y та дві появи предметної змінної z.

Оскільки квадратична змінна у рівнянні одна, то розглянемо випадок, коли предметна змінна z не має жодної появи у власному підтермі.

Згідно твердження 2. достатньо розглянути випадки коли предметна змінна x розташована у власному підтермі, тоді нехай вона стоїть на першому місці. Якщо це не так, то застосуємо комутування у власному підтермі. Отже, власний підтерм має вигляд: $F_2(u_1,u_2,u_3)$, де $u_1 = x$, $u_2, u_3 \in \{x,y\}$.

Якщо $u_2 = u_3 = y$, то маємо п'ять рівнянь: (27), (28), (29), (33) і

$$F_1(F_2(x,y,y),x,z) = F_3(x,y,z).$$

До останього рівняння застосувати взаємне перейменування предметних змінних x та y разом з (12)-комутуванням у термі з визначальною змінною F_3 та (13)-комутуванням у власному підтермі, як наслідок, маємо рівняння (30).

Якщо у власному підтермі предметних змінних x три появи, тобто $u_1 = u_2 = u_3 = x$, то маємо три рівняння: (24), (25), (26).

Якщо у власному підтермі дві появи предметних змінних x, тобто $u_2 = x$, $u_3 = y$, то маємо п'ять рівнянь: рівняння (30) та

$$F_1(F_2(x,x,y),x,y) = F_3(y,z,z);$$
$$F_1(F_2(x,x,y),x,z) = F_3(y,y,z);$$
$$F_1(F_2(x,x,y),y,y) = F_3(x,z,z);$$
$$F_1(F_2(x,x,y),z,z) = F_3(x,y,y).$$

Із вищенаведеного першого рівняння отримуємо рівняння (33) після перейменування предметних змінних відповідно до циклу (xy) та (13)-комутування у власному підтермі й (23)-комутування у термі з визначальною змінною F_1. Рівняння (29) отримаємо з другого рівняння, а третє рівняння — з рівнянням (27), після перейменування предметних змінних відповідно до циклу (xy) та (13)-комутування у власному підтермі. У четвертому рівнянні застосуємо зовнішнє ділення зліва операції F_1, перейменування відповідних функційних змінних, (13)-комутування у власному підтермі та термі з визначальною змінною F_3, отримаємо рівняння (28).

Якщо у власному підтермі немає жодної появи предметної змінної x, то ним можуть бути лише предментні змінні y. Але при взаємному перейменуванні предметних змінних за циклом (xy), переходимо до випадку, коли у власному підтнрмі всі появи змінної x, тобто маємо рівняння парастрофно-первинно рівносильні рівнянням (24), (25), (26).

Розглянемо випадок, коли предметна змінна z має одну появу у власному підтермі, тобто $u_2 = y$, а $u_3 = z$, то маємо рівняння (32) і ще чотири:

$$F_1(F_2(x,y,z),x,x) = F_3(y,y,z);$$
$$F_1(F_2(x,y,z),x,z) = F_3(x,y,y);$$
$$F_1(F_2(x,y,z),y,y) = F_3(x,x,z);$$
$$F_1(F_2(x,y,z),y,z) = F_3(x,x,y).$$

З першого рівняння отримуємо третє рівняння після перейменування предметних змінних відповідно до циклу (xy) та (12)-комутування у власному підтермі. У третьому рівнянні послідовно виконаємо такі перетворення: зовнішнє ділення зліва операції F_1, внутрішнє ліве ділення за змінної z, перейменування відповідних функційних змінних, (13)-комутування у термах з визначальними змінними F_1 і F_3 й (23)-комутування у термі з визначальною змінною F_1, отримаємо рівняння (31). Після перейменування предметних змінних відповідно до циклу (xy) та (12)-комутування у власному підтермі й (23)-комутування у термі з визначальною змінною F_3 друго рівняння маємо четверте рівняння. Рівняння (30) отримуємо з четвертого рівняння після застосування зовнішнього ділення зліва операції F_1 та перейменування відповідних функційних змінних.

Якщо $u_2 = x$, а $u_3 = z$, то маємо рівняння (31) і ще три:

$$F_1(F_2(x,x,z),x,z) = F_3(y,y,y);$$
$$F_1(F_2(x,x,z),y,y) = F_3(x,y,z);$$
$$F_1(F_2(x,x,z),y,z) = F_3(x,y,y).$$

Застосуємо до першого рівняння зовнішнє ділення зліва операції F_1, перейменування відповідних функційних змінних та перейменування предметних змінних відповідно до циклу (xy), отримаємо рівняння (25). Парастрофно-первинна рівносильність між другим рівнянням та рівнянням (31) очевидна після застосування у другому рівнянні внутрішнього лівого ділення за змінної z, перейменування відповідних функційних змінних та (13)-комутування у термах з визначальними змінними F_1 і F_3 й (23)-комутування у термі з визначальною змінною F_1. У третьому рівнянні застосуємо зовнішнє ділення зліва операції F_1 та перейменування відповідних функційних змінних, отримаємо рівняння (29).

І нарешті останній випадок, коли квадратична змінна має обидві появи у власному підтермі, тобто $u_2 = u_3 = z$, то маємо три рівняння:

$$F_1(F_2(x,z,z),x,x) = F_3(y,y,y),$$
$$F_1(F_2(x,z,z),x,y) = F_3(x,y,y),$$
$$F_1(F_2(x,z,z),y,y) = F_3(x,x,y).$$

До першого рівняння застосуємо зовнішнє ділення зліва операції F_1, перейменування відповідних функційних змінних та предметних змінних відповідно до циклу (xy), отримаємо рівняння (24). Для доведення парастрофно-первинної рівносильності між другим рівнянням та рівнянням (33) достатньо застосувати зовнішнє діленням зліва операції F_1 й перейменування відповідних функційних змінних у другому рівнянні. Отримаємо рівняння (27) з третього рівняння після застосування зовнішнього ділення зліва операції F_1, перейменування відповідних функційних змінних, перейменування предметних змінних відповідно до циклу (yx) та (13)-комутування у власному підтермі.

□

10. Класифікація рівнянь типу $(2,2,2,2)$

Лема 7. *Кожне чисте узагальнене тернарне квазігрупове функційне рівняння предметного типу* $(2,2,2,2)$ *парастрофно-первинно рівносильне принаймні одному з чотирьох рівнянь: (35), (36), (37), (38).*

Доведення. У будь-якому узагальненому тернарному функційному рівнянні предметного типу $(2,2,2,2)$ згідно з лемою 1. є чотири незалежних предметних змінних, кожна з яких має по дві появи, тому таке рівняння називають квадратичним [9, 16]. Нехай кожне з цих рівнянь має вигляд формули (40) та по дві появи кожної з предметних змінних: x, y, z та u. Припускаємо, що безповторна предметна змінна у власному підтермі розташована на першому місці, якщо це не так, то застосуємо комутування. Така предметна змінна завжди існує, оскільки рівняння квадратичне, а змінна F_2 тернарна. Тоді згідно з твердженням 2. власний підтерм має вигляд: $F_2(u_1,u_2,u_3)$, де $u_1 = x$, $u_2 = y$, $u_3 \in \{y,z\}$.

Якщо $u_3 = y$, то можливі три випадки: рівняння (35), (36) та (37).

Якщо $u_3 = z$, то можливі два випадки: друга поява змінної x розташована зліва або справа. Якщо друга поява змінної x розташована в лівій частині, то маємо рівняння (38) та рівняння

$$F_1(F_2(x,y,z),x,y) = F_3(z,u,u).$$

Застосуємо до останнього рівняння зовнішнє ділення зліва операції F_1, перейменування відповідних функційних змінних, перейменування предметних змінних відповідно до циклів (zx) та (uy), (13)-комутування та (23)-комутування у термі з визначальною змінною F_3, отримаємо рівняння (37). Якщо друга поява x розташована у правій частині рівняння, то маємо три рівняння:

$$F_1(F_2(x,y,z),u,u)=F_3(x,y,z);$$
$$F_1(F_2(x,y,z),y,z)=F_3(x,u,u);$$
$$F_1(F_2(x,y,z),y,u)=F_3(x,z,u).$$

Рівняння (37) отримуємо з першого рівняння після застосування ряду послідовних перетворень, а саме: внутрішнього лівого ділення за змінної z, зовнішнє ділення справа операції F_3, перейменування відповідних функційних змінних, перейменування предметних змінних відповідно до циклів (zx) та (yu), а також (23)-комутування та (12)-комутування у термах з визначальними змінними F_1 й F_3. У другому рівнянні застосуємо зовнішнє ділення зліва операції F_1, перейменуємо відповідні функційні змінні, перейменуємо предметні змінні відповідно до циклу (uy), а також здійснемо (23)-комутування у термах з визначальними змінними F_1 та F_3, отримаємо рівняння (37). У третьому рівнянні перейменуємо предметні змінні відповідно до циклу (xy) та застосуємо (23)-комутування у власному підтермі, маємо рівняння (38). $\square$

ВИСНОВКИ

На тернарних квазігрупах з точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує не більше, як 38 узагальнених тернарних рівнянь функційної довжини 3.

Подальша перспектива даного дослідження:
— знаходження розв'язків кожного з рівнянь поданих в теоремі 1.;
— з'ясувати парастрофно-первинну нерівносильність між кожною парою таких рівнянь;
— побудувати або знайти приклади трійок квазігруп, які би задовольняли дані рівняння;
— з'ясувати застосування отриманих функційних рівнянь для класифікації тотожностей.

ooooooo

Література

[1] *Aczél J.* Lectures on Functional Equations and their applications. — New York: Acad. press., 1966. — 510 p.

[2] *Kannappan Pl.* Functional Equations and Inequalities with Applications. Springer Monographs in Mathematics. — Boston, MA: Springer-Verlag US, 2009. — 810 p.

[3] *Крайнічук Г.В., Тарасевич А.В.* Про класифікацію функційних рівнянь на тримісних оборотних функціях // Міжнародна конференція молодих математиків (7-10 червня 2017): тези доповідей. — К., 2017. — 18 с.

[4] *Tarasevych A.V., Krainichuk H.V.* On classification of ternary quasigroup functional equations in three functional variables // Proceedings from MITI 2018: International Conference on Mathematics, Informatics and Information Technologies dedicated to the illustrious scientist Valentin Belousov. MITI 2018, April 19–21, 2018. — Alecu Russo Balti State University, Republic of Moldova. — P. 91–92.

[5] *Aczél J., Belousov V.D., Hosszú M.* Generalized associativity and bisymmetry on quasigroups. // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1960. — Vol. 11, Iss. 1–2. — P. 127–136.

[6] *Коваль Р.Ф.* Класифікація квадратичних функційних рівнянь малої довжини на квазігрупах // Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — 2004. — № 5. — С. 111–127.

[7] *Крайнічук Г.В.* Класифікація та розв'язання квазігрупових функційних рівнянь типу (4;2). // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. — 2015. — № 1/2. — С. 53–63.

[8] *Крайнічук Г.В.* Класифікація квазігрупових функційних рівнянь типу $(3;3;0)$. // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. — 2016. — № 1/2. — С. 33–41.

[9] *Krapež A.* Strictly Quadratic Functional Equations on Quasigroups I // Publ. Inst. Math. — 1981. — Vol. 29, No. 43. — P. 125–138.

[10] *Krapež A., Živković D.* Parastrophically equivalent quasigroup equations. // Publications de L'Institut Mathematique, Nouvelle serie. — 2010. — T. 87(101). — P. 39–58. doi: 10.2298/PIM1001039K

[11] *Movsisyan Yu.M.* Hyperidentities and Related Concepts, I. // Armenian Journal of Mathematics. — 2017. — Vol. 9. No. 2. — P. 146–222.

[12] *Сохацький Ф. М.* Про класифікацію функційних рівнянь на квазігрупах // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56. — № 9. — С. 1259–1266.

[13] *Сохацкий Ф.Н.* Многоместные разделимые квазигруппы со свойством обратимости. // В кн.: Квазигруппы и их системы. Математические исследования. Вып.113. Кишинев: Штиинца. — С. 89–99.

[14] *Sokhatsky F.M.* Parastrophic symmetry in quasigroup theory // Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences. — 2016. — № 1/2. — P. 70–83.

[15] *Sokhatsky F., Krainichuk H., Tarasevych A.* A classification of generalized functional equations on ternary quasigroups // Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences. — 2017. — № 1–2. — P. 97–107. doi: 10.31558/1817-2237.2017.1-2.8

[16] *Юрій Р. Ф.* Класифікація функційних рівнянь малої довжини на квазігрупових операціях: дис. ... канд. фіз.- мат. наук: 01.01.06 — Вінниця: Вінницький держ. пед. ун-т ім. Михайла Коцюбинського, 2006. — 133 с.

[17] *Krstić S.* Quadratic quasigroup identities. PhD thesis, University of Belgrade. — 1985. — P. 101. (in Serbo-Croatian)

[18] *Сохацький Ф. М.* Асоціати та розклади багатомісних операцій // Дис. ... доктора фіз.-мат. наук: 01.01.06. — Вінниц. держ. пед. ун-т ім. Михайла Коцюбинського, НАН України, Ін-т математики. — К.,2006. — 334 с.

[19] *Крайнічук Г.В., Тарасевич А.В.* Про тернарні квазігрупові функційні рівняння найменшої довжини. [Електронний ресурс] // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2017», 23–25 травня 2017 р., Львів. — Режим доступу: http://iapmm.lviv.ua/chyt2017/abstracts/Kraynichuk.pdf

Tarasevych A.V., Krainichuk H.V.

[1] *3rd-year Ph.D. student of the Faculty of Programming, Computer and Telecommunication Systems,*
Khmelnytskyi National University
[2] *Senior Lecturer of the Department of Mathematical Analysis and Differential Equations,*
Vasyl' Stus Donetsk National University

ON CLASSIFICATION OF GENERALIZED FUNCTIONAL EQUATIONS OF LENGTH THREE ON TERNARY QUASIGROUPS

SUMMARY

In this article, the study of all generalized equations from three functional variables on ternary quasigroups is reduced to the research of 36 such equations.

Key words: *ternary quasigroups, functional equation, parastrophically primary equivalence.*

Тарасевич А.В., Крайничук Г.В.

[1] *аспирантка 3 курса факультета программирования, компьютерных и телекоммуникационных систем,*
Хмельницкий национальный университет
[2] *старший преподаватель кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений,*
Донецкий национальный университет имени Василя Стуса

О КЛАССИФИКАЦИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛИНЫ ТРИ НА ТЕРНАРНЫХ КВАЗИГРУППАХ

РЕЗЮМЕ

В данной статье сведено изучения всех обобщенных уравнений от трех функциональных переменных на тернарных квазигруппах к исследованию 36 таких уравнений.

Ключевые слова: *тернарная квазигруппа, функциональное уравнение, парастрофно-первичная эквивалентность.*