

УДК 539.3

**ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН БЕЗМЕЖНОГО ТРИСКЛАДОВОГО ТІЛА
ЗА ПЕРІОДИЧНОЇ ДІЇ ТЕПЛООВОГО ПОТОКУ**

Б.В. Процюк, О.П. Горун

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів

Запропоновано методику розв'язання квазістатичних задач термопружності для безмежного трискладового тіла за дії поверхневих періодичних джерел тепла для різних, в тому числі, малих товщин середньої складової. Методика передбачає застосування узагальнених функцій та функцій Гріна нестационарної задачі теплопровідності для трискладового простору. Наведено результати числових досліджень температури, напружень та переміщень.

Ключові слова: температурні поля, термопружний стан, трискладові тіла, періодична теплова дія, функції Гріна.

Вступ. Періодична теплова дія широко використовується в теплофізиці [1–7]. При цьому, як правило, розглядають задачі теплопровідності для одно- та двоскладових тіл, а така теплова дія моделюється синусоїдальним або косинусоїдальним законом зміни за часом або температури на обмежуючій поверхні [3–5], або інтенсивності поверхневих [7] чи об'ємних джерел тепла [6]. Актуальною є розробка ефективної методики дослідження нестационарного термопружного стану, зумовленого періодичною тепловою дією для кусково-однорідних елементів конструкцій, зокрема, які складаються з двох масивних частин, з'єднаних проміжковим шаром.

Слід зазначити, що реалізація аналітичних і числових методів розв'язування задач теплопровідності та термопружності у кусково-однорідних тілах значно ускладнюється у випадку тонких прошарків. Тому їх досить часто замінюють певними узагальненими контактними тепловими та механічними умовами, як наприклад, умови неідеального теплового контакту, які у найбільш загальному вигляді для задач теплопровідності отримано у [8]. Інший спосіб вирішення цієї проблеми передбачає використання певних припущень щодо розподілу температури у тонких шарах, зокрема, у [9] запропоновано математичну модель, яка передбачає лінійний закон зміни температури в областях тонких включень.

У даній статті запропоновано підхід, який базується на застосуванні узагальнених функцій та функцій Гріна, до визначення термопружного стану безмежних трискладових тіл за періодичної теплової дії поверхневих джерел тепла без використання спрощуючих припущень щодо розподілу температури у проміжковому шарі.

Постановка задачі термопружності та її розв'язання. Розглянемо віднесене до циліндричної системи координат r, φ, z необмежене трискладове циліндричне тіло з плоско-паралельними поверхнями поділу $z = 0$ і $z = h$ та теплоізолюваною, гладко закріпленою (відсутні радіальні переміщення і дотичні напруження) поверхнею $r = R$ (рис. 1). Вважаємо, що початкова температура тіла дорівнює нулю, фізико-механічні характеристики складових, між якими виконуються умови ідеального термомеханічного контакту, є сталими, а на поверхні поділу $z = 0$ діє періодичне джерело тепла $\tilde{w}_t(\tau)$, інтенсивність якого має синусоїдальний $\tilde{w}_t(\tau) = q_0 \sin \varpi \tau$ або косинусоїдальний $\tilde{w}_t(\tau) = q_0 \cos \varpi \tau$ характер зміни за часом (ϖ – частота, q_0 – потужність джерела тепла).

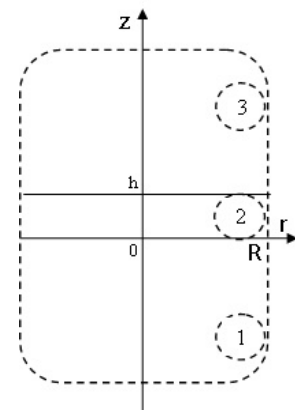


Рис. 1

Для визначення температурного поля маємо рівняння теплопровідності з узагальненими по z похідними

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_t(z) \frac{\partial t}{\partial z} \right] = c_V(z) \frac{\partial t}{\partial \tau} - \tilde{w}_t(\tau) \delta(z), \tag{1}$$

та крайові умови

$$t(z, \tau) \Big|_{z \rightarrow \pm \infty} = 0, \quad t(z, \tau) \Big|_{\tau=0} = 0, \tag{2}$$

де $\lambda_t(z)$ та $c_V(z)$ мають вигляд

$$p(z) = p^{(1)} + \sum_{k=1}^2 \left(p^{(k+1)} - p^{(k)} \right) S(z - z_k), \tag{3}$$

$S(z)$ – функція Хевісайда, $\delta(z)$ – дельта-функція Дірака, $z_1 = 0$, $z_2 = h$, індексу $i = 1$ відповідають величини, які належать першій складовій $-\infty \leq z \leq 0$, $i = 2$ – другій (проміжковому шару) $0 \leq z \leq h$, $i = 3$ – третій $h \leq z \leq +\infty$.

За допомогою функцій Гріна температурне поле шукатимемо у вигляді

$$t(z, \tau) = t_1(z, \tau) + \sum_{k=1}^2 (t_{k+1}(z, \tau) - t_k(z, \tau)) S(z - z_k),$$

де температура i -ої складової $t_i(z, \tau)$ визначається із співвідношень

$$t_i(z, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\tau} G_{i1}(z, \zeta, \tau - \tau') \tilde{w}_i(\tau') \delta(\zeta) d\zeta d\tau', \quad (4)$$

в яких $G_{i1}(z, \zeta, \tau)$ – елементи матриці Гріна.

Підставимо у (4) вирази для $G_{i1}(z, \zeta, \tau)$ [10] та $\tilde{w}_i(\tau)$ у вигляді $\tilde{w}_i(\tau) = q_0 \frac{e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau}}{2i}$ або

$\tilde{w}_i(\tau) = q_0 \frac{e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}}{2}$. Після низки перетворень з урахуванням інтегралу

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\pi(\tau - \tau')}} \exp\left[-\frac{f^2(z)}{4a(\tau - \tau')}\right] \frac{e^{i\omega\tau'} \pm e^{-i\omega\tau'}}{2i} d\tau' = \frac{1}{4\sqrt{\omega}} \left\{ \frac{\pm i}{\sqrt{i}} e^{i\omega\tau} \left[e^{f(z)\sqrt{\frac{i\omega}{a}}} \times \right. \right. \\ \times \operatorname{erf}\left(\sqrt{i\omega(\tau - \tau')} + \frac{f(z)}{2a(\tau - \tau')}\right) - e^{-f(z)\sqrt{\frac{i\omega}{a}}} \operatorname{erf}\left(-\sqrt{i\omega(\tau - \tau')} + \frac{f(z)}{2a(\tau - \tau')}\right) \Big] - \\ \left. - \frac{i}{\sqrt{-i}} e^{-i\omega\tau} \left[e^{f(z)\sqrt{\frac{i\omega}{a}}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{-i\omega(\tau - \tau')} + \frac{f(z)}{2a(\tau - \tau')}\right) - e^{-f(z)\sqrt{\frac{i\omega}{a}}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \operatorname{erf}\left(-\sqrt{-i\omega(\tau - \tau')} + \frac{f(z)}{2a(\tau - \tau')}\right) \right] \right\} \Bigg|_0^{\tau}, \end{aligned}$$

формули Ейлера $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ та формули нескінченного ряду для інтегралу ймовірностей комплексного аргументу [11]

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}(x + iy) = \operatorname{erf}(x) + \frac{e^{-x^2}}{2\pi x} [1 - \cos(2xy) + i \sin(2xy)] + \frac{2}{\pi} e^{-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2/4}}{n^2 + 4x^2} \times \\ \times [f_n(x, y) + i g_n(x, y)] + \varepsilon(x, y), \end{aligned}$$

отримаємо вирази для функцій t_i , які у безрозмірних змінних матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} t_1(\bar{z}, Fo) = \frac{\gamma}{4\delta_1} \left\{ s_1^-(\bar{z}, Fo) + \nu_1 s_1^-(\bar{z}, Fo) + \nu_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n s_1^+ \left(2n\bar{h}a_{12}^* - \bar{z}, Fo \right) - \right. \\ \left. - \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n s_1^+ \left(2(1+n)\bar{h}a_{12}^* - \bar{z}, Fo \right) \right\}, \quad (5) \end{aligned}$$

$$t_2(\bar{z}, Fo) = \frac{\gamma}{2(\delta_1 + \delta_2)} \left\{ s_1^+ \left(a_{12}^* \bar{z}, Fo \right) + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n s_1^+ \left(a_{12}^* (\bar{z} + 2n\bar{h}), Fo \right) - \right.$$

$$- \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n s_1^+ \left(a_{12}^* (2\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}), Fo \right) \Bigg\},$$

$$t_3(\bar{z}, Fo) = \frac{\delta_2 \gamma}{(\delta_1 + \delta_2)(\delta_2 + \delta_3)} \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n s_1^+ \left(a_{12}^* (1 + 2n)\bar{h} + a_{13}^* (\bar{z} - \bar{h}), Fo \right).$$

Тут $f(z)$ – деяка функція, $a > 0$,

$$f_n(x, y) = 2x - 2x \operatorname{ch}(ny) \cos(2xy) + n \operatorname{sh}(ny) \sin(2xy),$$

$$g_n(x, y) = 2x \operatorname{ch}(ny) \sin(2xy) + n \operatorname{sh}(ny) \cos(2xy), \quad |\varepsilon(x, y)| \approx 10^{-14} |\operatorname{erf}(x + iy)|;$$

$$s_1^{\pm}(x, Fo) = e^{x\eta} \left[(-1)^p \cos(x\eta + PdFo) \left(\pm 1 - \phi \left(\sqrt{\frac{PdFo}{2}} + \frac{x}{2\sqrt{a_{1s}Fo}}, \sqrt{\frac{PdFo}{2}} \right) \right) - \right.$$

$$\left. - \sin(x\eta + PdFo) \left(\pm 1 - \psi \left(\sqrt{\frac{PdFo}{2}} + \frac{x}{2\sqrt{a_{1s}Fo}}, \sqrt{\frac{PdFo}{2}} \right) \right) \right] +$$

$$+ e^{-x\eta} \left[(-1)^p \cos(x\eta - PdFo) \left(\mp 1 - \phi \left(\sqrt{\frac{PdFo}{2}} - \frac{x}{2\sqrt{a_{1s}Fo}}, \sqrt{\frac{PdFo}{2}} \right) \right) \right] +$$

$$+ \sin(x\eta - PdFo) \left(\mp 1 - \psi \left(\sqrt{\frac{PdFo}{2}} - \frac{x}{2\sqrt{a_{1s}Fo}}, \sqrt{\frac{PdFo}{2}} \right) \right) \Bigg], \quad (6)$$

$$\varphi^{\pm}(\xi, y) = \operatorname{erf}(\xi) + \frac{e^{-\xi^2}}{2\pi\xi} (1 - \cos(2\xi y) \pm \sin(2\xi y)) + \frac{2e^{-\xi^2}}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m^2/4}}{m^2 + 4\xi^2} \times$$

$$\times [2\xi - 2\xi \operatorname{ch}(my) \cos(2\xi y) + m \operatorname{sh}(my) \sin(2\xi y) \pm 2\xi \operatorname{ch}(my) \sin(2\xi y) \pm m \operatorname{sh}(my) \cos(2\xi y)],$$

$$a_{ij}^* = \sqrt{\frac{a_i}{a_j}}, \quad \delta_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{a_i}}, \quad \nu_1 = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1 + \delta_2}, \quad \nu_2 = \frac{\delta_3 - \delta_2}{\delta_3 + \delta_2}, \quad \bar{z} = \frac{z}{l_0}, \quad Fo = \frac{a_s \tau}{l_0^2}, \quad \bar{h} = \frac{h}{l_0},$$

$$a_{is} = \frac{a_i}{a_s}, \quad \gamma = \frac{\bar{q}_0}{2} \sqrt{\frac{2}{Pd}}, \quad Pd = \frac{\omega l_0^2}{a_s}, \quad \bar{q}_0 = \frac{q_0 l_0}{\sqrt{a_s}}, \quad \eta = \sqrt{\frac{Pd}{2a_{1s}}},$$

a_i – коефіцієнт теплопровідності i -ої складової, l_0 – деякий лінійний розмір; $p=0$, $\varphi = \phi^-$, $\psi = \phi^+$ – для синусоїдального джерела тепла, а для $p=1$, $\varphi = \phi^+$, $\psi = \phi^-$ – косинусоїдального.

Розглянемо деякі часткові випадки. Переходячи у (5) до границі при $\lambda_t^{(3)} \rightarrow \infty$ або $\lambda_t^{(3)} \rightarrow 0$, дістанемо вирази для визначення температурного поля у двоскладовому півбезмежному тілі

$$t_1(\bar{z}, Fo) = \frac{\gamma}{4\delta_1} \left\{ s_1^-(\bar{z}, Fo) + \nu_1 s_1^-(\bar{z}, Fo) + \nu_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 k)^n s_1^+ \left(2n\bar{h} a_{12}^* - \bar{z}, Fo \right) - \right.$$

$$\left. - k \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 k)^n s_1^+ \left(2(1+n)\bar{h} a_{12}^* - \bar{z}, Fo \right) \right\},$$

$$t_2(\bar{z}, Fo) = \frac{\gamma}{2(\delta_1 + \delta_2)} \left\{ s_1^+(\bar{z}, Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 k)^n s_1^+ \left(a_{12}^* (\bar{z} + 2n\bar{h}), Fo \right) - \right.$$

$$\left. - k \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 k)^n s_1^+ \left(a_{12}^* (2\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}), Fo \right) \right\}, \quad (7)$$

поверхня $z = h$ якого підтримується при нульовій температурі ($k = 1$) або є теплоізолюваною ($k = -1$).

Поклавши у (5) $a_2 = a_3$, $\lambda_t^{(2)} = \lambda_t^{(3)}$, отримаємо розв'язок задачі теплопровідності для двоскладового безмежного тіла

$$t_1(\bar{z}, Fo) = \frac{\sqrt{2\bar{q}_0}(1+\nu_1)}{8\delta_1\sqrt{Pd}} s_1^-(\bar{z}, Fo),$$

$$t_2(\bar{z}, Fo) = \frac{\sqrt{2\bar{q}_0}}{4(\delta_1 + \delta_2)\sqrt{Pd}} s_1^+(a_{12}^*\bar{z}, Fo). \quad (8)$$

Для квазіусталеного теплового режиму ($Fo \rightarrow \infty$), функції $s_1^\pm(x, Fo)$ у співвідношеннях (5), (7), (8) матимуть вигляд

$$s_1^\pm(x, Fo) = e^{x\eta} \left[(\pm 1 - 1) \left((-1)^P \cos(x\eta + PdFo) - \sin(x\eta + PdFo) \right) \right] + e^{-x\eta} \left[(\mp 1 - 1) \left((-1)^P \cos(x\eta - PdFo) + \sin(x\eta - PdFo) \right) \right]. \quad (9)$$

Оскільки температурне поле у тілі змінюється по товщині, то в ньому виникатимуть лише радіальні та кільцеві напруження [12]:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\phi\phi} = \sigma_0(z, \tau) = -\frac{E(z)}{1-\nu(z)} \alpha_t(z) t(z, \tau).$$

При цьому радіальні переміщення відсутні, а осьові (без врахування переміщень тіла як твердого цілого) визначаються із співвідношення:

$$w(z, \tau) = \int_{h/2}^z \frac{1+\nu(\tilde{z})}{1-\nu(\tilde{z})} \alpha_t(\tilde{z}) t(\tilde{z}, \tau) d\tilde{z}.$$

Тут коефіцієнт Пуассона $\nu(z)$, модуль пружності $E(z)$ та коефіцієнт лінійного розширення $\alpha_t(z)$ мають вигляд (3).

Числові дослідження. Наведемо результати числових досліджень безрозмірних температури $\theta = tQ_0$, напружень $\sigma = \sigma_0Q_0 \frac{(1-\nu_2)}{E_2\alpha_t^{(2)}}$ та переміщень $\bar{w} = \frac{wQ_0(1-\nu_2)10^3}{\alpha_t^{(2)}(1+\nu_2)l_0} \left(Q_0 = \frac{\lambda_t^{(2)}}{q_0l_0} 10^6 \right)$, у три-складовому тілі за синусоїдального ($\varpi = 1$) характеру зміни інтенсивності джерела тепла, коли матеріалами півбезмежних тіл є срібло ($\lambda_t = 410 \text{ Bm}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C})$, $a = 0.1685 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, $\nu = 0.37$, $E = 82.7 \text{ ГПа}$, $\alpha_t = 19.5 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$), а проміжкового шару – двоокис цирконію ($\lambda_t = 1 \text{ Bm}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C})$, $a = 0.53 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\nu = 0.31$, $E = 172 \text{ ГПа}$, $\alpha_t = 10.6 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$).

На рис. 2 проілюстровано вплив товщини проміжкового шару на розподіл температури на поверхнях поділу $z = 0$ (суцільні лінії) і $z = h$ (штрихові лінії). Як видно, при зменшенні товщини температура на поверхні $z = 0$ знижується, а на поверхні $z = h$ підвищується.

При $h = 10^{-2} \text{ м}$ (криві 1) та $h = 10^{-3} \text{ м}$ (криві 2) температура на поверхні $z = h$ близька до нуля, а при $z = 0$ практично однакова.

На рис. 3 показано зміну температури на поверхнях поділу $z = 0$ (суцільна лінія) і $z = h$ (штрихова лінія) для малих і великих часів, обчислену за співвідношеннями (7) (крива 1) та (9) (крива 2) при $h = 10^{-2} \text{ м}$. Бачимо, що починаючи з $\tau = \tau^* \approx 700 \text{ сек}$ тепловий режим можна вважати квазіусталеним. Тому для часів $\tau > \tau^*$ дослідження температурних полів можна проводити за простішими формулами (9).

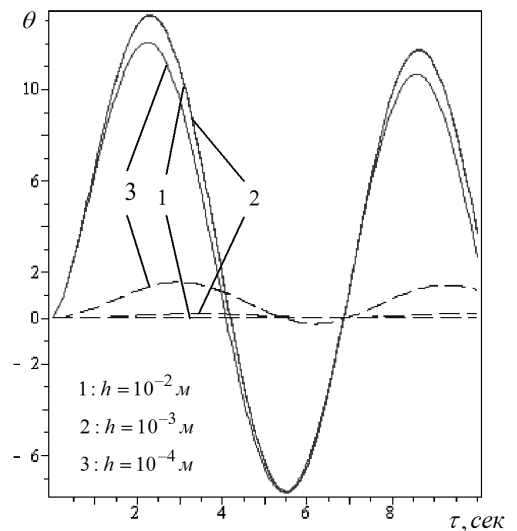


Рис. 2

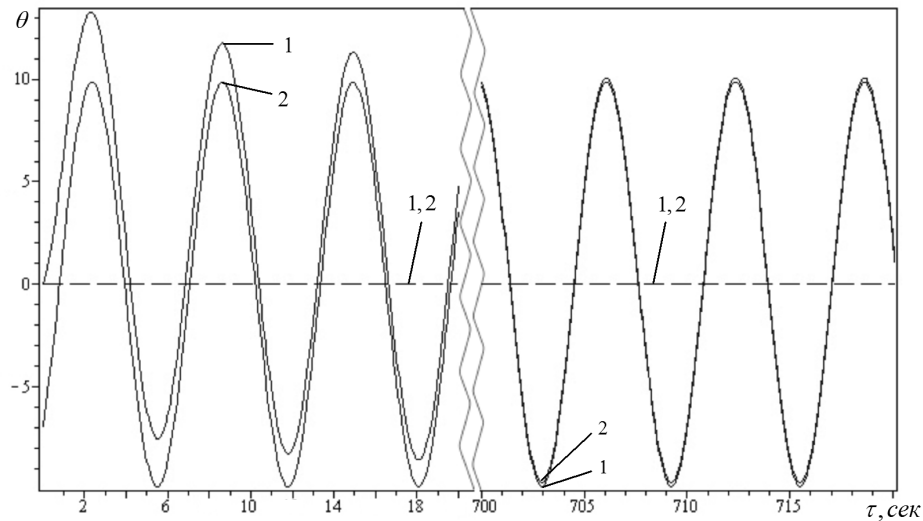


Рис. 3

На рис. 4, 5 показано залежність температури від координати при $h = 10^{-2} \text{ м}$ для різних часів. Розподіл температури в проміжковому шарі та приповерхневих областях півбезмежних тіл на початковій стадії нагріву проілюстровано на рис. 4, а, а після переходу на квазіусталений тепловий режим на рис. 4, б.

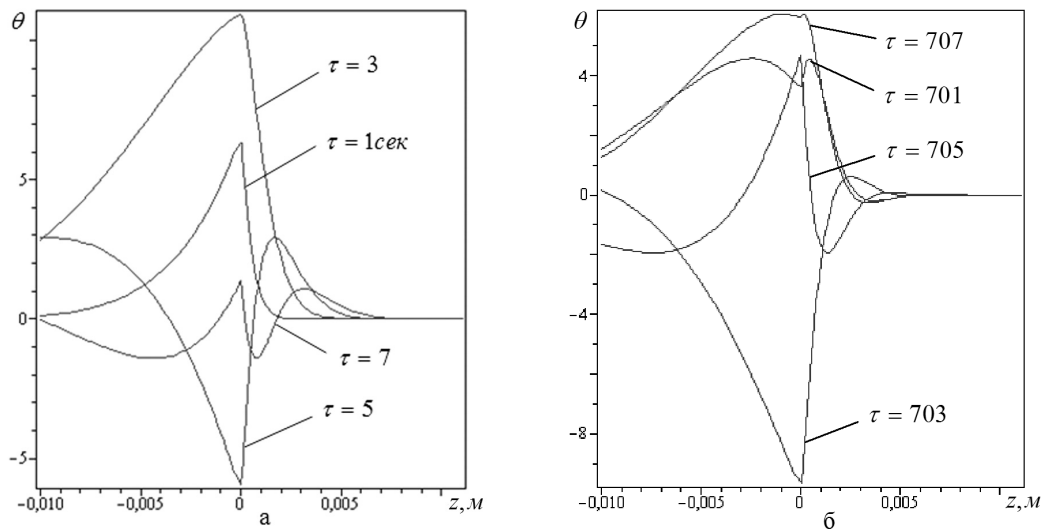


Рис. 4

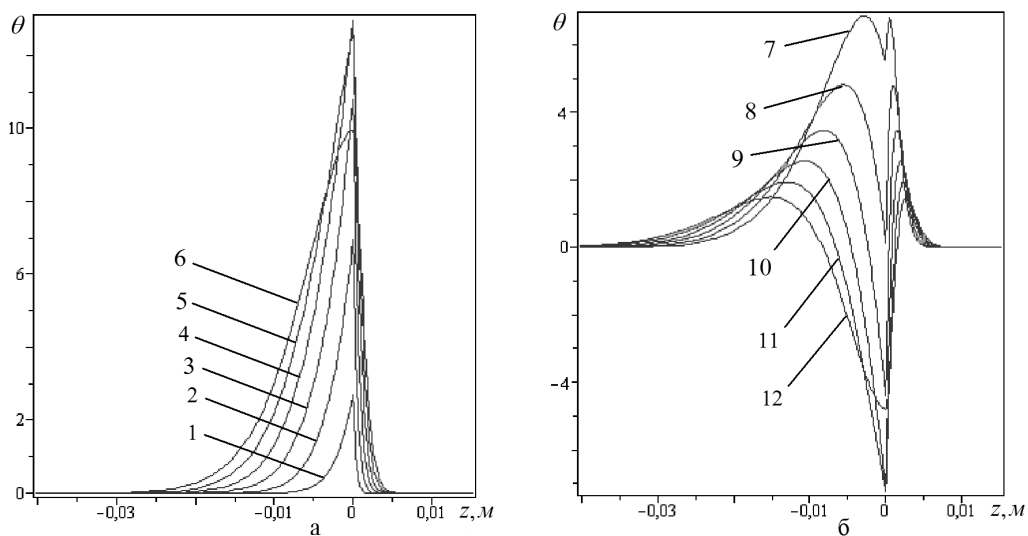


Рис. 5

На рис. 5, а, б наведено температурний розподіл для більш розширеної області за повний період дії джерела тепла в моменти часу від $\tau = \pi/6$ до $\tau = 2\pi$ з інтервалом $\pi/6$ (i -ій кривій відповідає час $\tau = i\pi/6$). Як видно, характер розподілу по товщині проміжкового шару для кожного моменту часу різний. Температура третьої складової близька до нуля протягом дії джерела тепла. Залежно від часу максимум температури може перебувати або на поверхні поділу $z = 0$, або в проміжковому шарі чи у першій складовій. Зокрема, при $\tau < 2.3$ сек він знаходиться на поверхні нагріву.

Величини розтягуючих та стискуючих напружень на поверхнях поділу $z = 0$ і $z = h$ при товщині проміжкового шару $h = 10^{-2}$ м (суцільна лінія) та $h = 10^{-4}$ м (штрихова лінія) показано на рис. 6. Аналогічно, як і випадку температури, зі зменшенням h максимальне значення напружень при $z = 0$ також зменшується, а при $z = h$ збільшується. На поверхнях поділу бачимо стрибки напружень, величини яких зростають зі збільшенням абсолютного значення температури.

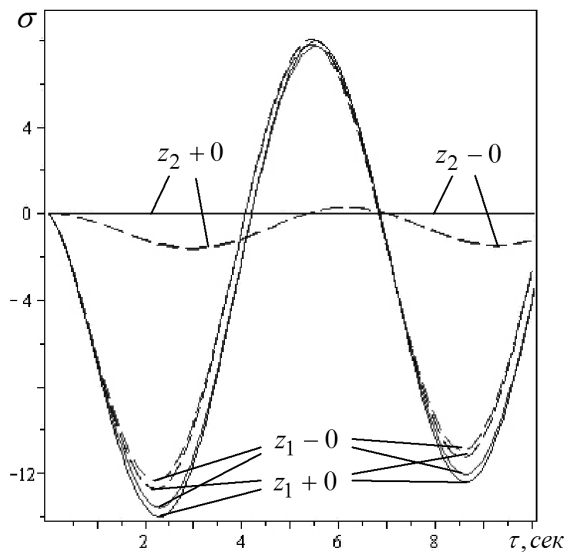


Рис. 6

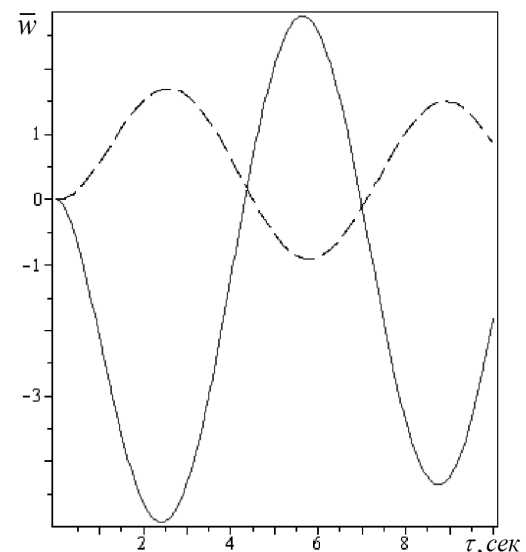


Рис. 7

На рис. 7 зображено залежності переміщень від часу на поверхнях поділу $z = 0$ (суцільна лінія) і $z = h$ (штрихова лінія) при $h = 10^{-3}$ м. Як видно, переміщення також мають періодичний характер. Вони співпадають, коли температури при $z = 0$ і $z = h$ є однаковими. На поверхні $z = 0$ переміщення набувають додатних (від'ємних) значень, коли температура від'ємна (додатна), а на поверхні $z = h$ – навпаки. Максимальні значення переміщень на поверхнях поділу відрізняються у 2.5 рази, тоді як температур – у 10 разів.

Висновки. Проілюстровано методику визначення нестационарних температурних полів і зумовлених ними напружень та переміщень у трискладових тілах за періодичної дії поверхневих джерел тепла. Із знайденого розв'язку задачі теплопровідності для безмежного трискладового тіла, на поверхні поділу якого зосереджене джерело тепла синусоїдального або косинусоїдального характеру зміни інтенсивності, як часткові випадки отримано розв'язки для двоскладових безмежного і півбезмежного тіл та відповідні співвідношення для квазіусталених теплових режимів.

За результатами числових досліджень, зокрема, встановлено, що у різні моменти часу характер кожного з розподілів температури, напружень та переміщень по товщині середньої складової не однаковий; вплив джерела тепла на температуру третьої складової, навіть для досить малих товщин проміжкового шару, є незначним.

РЕЗЮМЕ

Предложена методика решения квазистатических задач термоупругости для трехсоставного тела при действии периодических источников тепла на поверхностях раздела для различных, в том числе, малых толщин средней составляющей. Методика предусматривает применение обобщенных функций и функций Грина нестационарной задачи теплопроводности для трехсоставного пространства. Приведены результаты численных исследований температуры, напряжений и перемещений.

Ключевые слова: температурные поля, термоупругое состояние, трехсоставные тела, периодическое тепловое воздействие, функции Грина.

SUMMARY

The method of solving the quasistatic thermoelastic problems for a threelayer body under the action of the periodic heat sources at the surfaces of separation for different, including small, thickness of a medium component is proposed. The method involves the use of generalized functions and Green's functions of unsteady heat conduction problem for the three-layer space. The results of numerical researches of temperature, stresses and displacements are given.

Keywords: temperature field, thermoelastic state, threelayer body, periodic heat action, the Green's function.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Филиппов Л.П. Измерение теплофизических свойств веществ методом периодического нагрева / Л.П. Филиппов. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 105 с.
2. Измерение тепловых свойств диэлектрических пленок зондовым методом периодического нагрева. I. Теория метода / С.Н. Кравчун, С.Т. Давитадзе, Н.С. Мизина, Б.А. Струков // Физика твердого тела. – 1997. – Т. 39, № 4. – С. 762-767.
3. Кравчун С.Н. Метод периодического нагрева в экспериментальной теплофизике / С.Н. Кравчун, А.А. Липаев. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2006. – 208 с.
4. Христофоров А.В. Интерференция температурных волн / А.В. Христофоров, И.С. Абросимова. – Казань: КФУ, 2012. – 18 с.
5. Modeling the snow surface temperature in an energy balance snowmelt model. [electronic resource] / J. You, D.G. Tarboton, C.H. Luce // Lincoln, Nebraska. Hydrological Processes – 2004. – Electronic regime of access: http://uwrl.usu.edu/www/programs/water/Publications/Modeling_Snow_Surface.pdf
6. Zhefu Wang. Applications of Thermal Wave Technique in Liquid Thermal Conductivity Measurements and Flow Field Diagnostics: an abstract of the dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in Mechanical Engineering / Zhefu Wang. – Ann Arbor. United States, 2008. – 148 p.
7. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М.: Наука, 1964. – 488 с.
8. Подстригач Я.С. Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя / Я.С. Подстригач // Инж.-физ. журн. – 1963. – Т. 6, № 10. – С. 59-64.
9. Дяконюк Л. Гетерогенний підхід до моделювання процесу теплоперенесення в багат шарових конструкціях із врахуванням малих товщин окремих шарів / Л. Дяконюк, Я. Савула // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології: наук. зб. – 2005. – Вип. 1. – С. 61-70.
10. Процюк Б.В. Нестационарное одномерное температурное поле тришаровых тел с плоско-параллельными границами раздела / Б.В. Процюк, И.И. Верба // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 1999. – Вип. 1. – С. 200-205.
11. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
12. Кушнір Р.М. Температурні напруження та переміщення в багат шаровій пластині з нелінійними умовами теплообміну / Р.М. Кушнір, Б.В. Процюк, В.М. Синюта // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – № 6. – С. 31-38.

Надійшло до редакції 17.09.2013 р.